Ingeniero Industrial
Curso 2006/07
Transformadas Integrales y
Ecuaciones en Derivadas Parciales
5 de julio de 2007

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Indicaciones

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones, excepto los alumnos que presentaron trabajos, los cuales deberán **elegir una** de las cuestiones que valen medio punto.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **3.5 horas**.
- Tal como se indica en la convocatoria, las notas se publicarán el **martes 10 de julio** en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística en la planta baja del Antiguo Hospital de Marina. El horario de revisión será:
  - ✓ Miércoles 11, de **15:30** a **16:30**
  - ✓ Lunes 16, de **9:30** a **11:30**

Teoría y cuestiones

1. El siguiente problema describe las oscilaciones transversales de una viga de Euler-Bernoulli de longitud unidad, empotrada en un extremo y con una masa de magnitud m suspendida en el otro

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x)+\kappa^2 u_{xxxx}(t,x)=0, & t>0,\ 0<x<1 \\ u(t,0)=u_x(t,0)=0, & t>0 \\ u_{xx}(t,1)=0,\quad u_{xxx}(t,1)=mu_{tt}(t,1), & t>0 \end{array}\right\} \qquad \text{(E-B)}$$

(a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que la energía del sistema

$$\mathcal{E}(t)=\frac{\kappa^2 m}{2}\,u_t^2(t,1)+\frac{1}{2}\int_0^1 \kappa^2 u_{xx}^2(t,x)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(t,x)\,dx$$

es constante a lo largo del tiempo.

(b) **(0.25 Ptos.)** Determina el valor de la energía para las condiciones iniciales

$$u(0,x)=\alpha\,\mathrm{sen}(\pi x),\quad u_t(0,x)=0,\quad 0<x<1$$

($\alpha>0$ constante) correspondientes a una viga de forma sinusidal inicialmente en reposo.

(c) **(0.25 Ptos.)** Si en el extremo $x=1$ se está ejerciendo además una fuerza proporcional a la velocidad, es decir, se tiene que

$$u_{xxx}(t,1)=mu_{tt}(t,1)+\beta u_t(t,1)$$

con $\beta>0$ constante, comprueba que en este caso la energía es decreciente.

2. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando convenientemente la respuesta:

(a) **(0.5 Ptos.)** Si las funciones $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ forman una base ortonormal de $L^2(0,\pi)$, se verifica la igualdad:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\cos(x^2)\phi_n(x)\,dx=1$$

(b) **(0.5 Ptos.)** Dado el siguiente sistema de Sturm-Liouville singular de tipo Bessel,

$$\left.\begin{array}{ll} x^2 f''(x)+xf'(x)-f(x)=-\mu^2x^2 f(x), & 0<x<1 \\ \exists\ f(0), & \\ \alpha f(1)+\beta f'(1)=0 & \end{array}\right\} \qquad \text{(S-L)}$$

con $\alpha,\beta>0$ constantes, se tiene que μ^2 es un valor propio de (S-L) si y solamente si μ es solución de la ecuación

$$\alpha J_1(\eta)+\beta\eta J_1'(\eta)=0$$

(c) **(0.5 Ptos.)** Dado el problema

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x)=c^2u_{xx}(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x)=\mathrm{sen}(\pi x), & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\heartsuit)$$

la función

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}\left(\pi\left(x+ct\right)\right)+\mathrm{sen}\left(\pi\left(x-ct\right)\right)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy$$

es solución de ($\heartsuit$) para cualquier $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ arbitraria.

Sigue detrás ⇒

Problemas

1. Dado el problema:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + (1+\varepsilon u(t,x))\, u_x(t,x) = \varepsilon u(t,x) + \operatorname{sen}(t), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = x^2, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

con $\varepsilon > 0$ una constante:

(a) **(1.5 Ptos.)** Utiliza el método de las características para obtener la solución de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

(b) **(0.5 Ptos.)** ¿Está dicha solución definida en todo el dominio $[0,+\infty[\,\times\,\mathbb{R}$? ¿Por qué?

(c) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que cuando $\varepsilon \to 0$, las soluciones de los problemas $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ convergen a la solución del problema

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + u_x(t,x) = \operatorname{sen}(t), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = x^2, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P}_0)$$

2. Se considera un problema de transmisión de calor sobre una barra unidimensional de longitud π, de forma que inicialmente la temperatura es constante en la barra. Además uno de los extremos está aislado y en el otro es conocido el flujo térmico, siendo la formulación matemática del problema la siguiente:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), & t>0,\ 0<x<\pi \\ u(0,x) = u_0, & 0<x<\pi \\ \left.\begin{array}{l} u_x(t,0) = 0 \\ u_x(t,\pi) = \operatorname{sen}(t) \end{array}\right\} & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\spadesuit)$$

con $c, u_0 > 0$ constantes.

(a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que la función

$$\omega(t,x) = u(t,x) - \frac{x^2}{2\pi}\operatorname{sen}(t)$$

con u solución de $(\spadesuit)$, verifica la ecuación del calor con un término fuente y condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneas.

(b) **(1.75 Ptos.)** Utiliza el método de separación de variables para obtener ω.

(c) **(0.25 Ptos.)** Utiliza los apartados anteriores para escribir la expresión de la solución del problema original $(\spadesuit)$.

3. **(2.5 Ptos.)** Consideremos el siguiente problema para la ecuación de ondas sobre la semirrecta $[0,+\infty[$:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = c^2 y_{xx}(t,x) + \mathcal{X}_{[0,T]}(t)\cos(\omega x), & t>0,\ x>0 \\ y(0,x) = y_t(0,x) = 0, & x>0 \\ y(t,0) = \varphi(t), & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

con $c, \omega, T > 0$ constantes, $\mathcal{X}_{[0,T]}$ la función característica del intervalo $[0,T]$,

$$\mathcal{X}_{[0,T]}(t) = \begin{cases} 1, & 0\le t\le T \\ 0, & t>T \end{cases}$$

y $\varphi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria. Utiliza la transformada de Laplace para encontrar la solución *acotada* de $(\clubsuit)$.

4. **(2.5 Ptos.)** Resuelve la siguiente ecuación de Poisson en un dominio circular cuyos extremos permanecen fijos:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}, & (x,y)\in\Omega \\ u(x,y) = 0, & (x,y)\in\partial\Omega \end{array}\right\}$$

con $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R^2\right\}$, siendo $R > 1$.

(**Ayuda:** Usar coordenadas polares, teniendo en cuenta que al separar las variables, la función asociada al radio debe estar definida en cero y la función asociada al ángulo y su derivada son 2π-periódicas).