Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniero Industrial
Curso 2005/06
Transformadas Integrales y
Ecuaciones en Derivadas Parciales
18 de septiembre de 2006

Indicaciones

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **3.5 horas**.
- Tal como se indica en la convocatoria, las notas se publicarán el **jueves 21 de septiembre** en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística en la planta baja del Antiguo Hospital de Marina. El horario de revisión será:
  - ✓ Jueves 21, de **16:00** a **18:00**
  - ✓ Viernes 22, de **9:30** a **11:30**

Teoría y cuestiones

1. Dada la *ecuación de Burger* con condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x)=0, & t>0,\ 0<x<\ell \\ u(t,0)=u(t,\ell)=0, & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\heartsuit)$$

   (a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que la energía

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^\ell u^2(t,x)\,dx$$

   asociada a la solución de ($\heartsuit$) es constante a lo largo del tiempo.

   (b) **(0.5 Ptos.)** ¿Qué ocurre con la energía en el caso de la ecuación de Burger con viscosidad

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x)-\varepsilon^2 u_{xx}(t,x)=0, & t>0,\ 0<x<\ell \\ u(t,0)=u(t,\ell)=0, & t>0 \end{array}\right\}? \qquad (\heartsuit\heartsuit)$$

   (c) **(0.5 Ptos.)** Utiliza los resultados de los apartados anteriores para demostrar que para la condición inicial

$$u(0,x)=0, \quad 0<x<\ell$$

   la única solución tanto de ($\heartsuit$) como de ($\heartsuit\heartsuit$) es la idénticamente nula $u\equiv 0$.

2. **(1 Pto.)** Si $u(t,x)$ es solución de la ecuación no lineal

$$u_t(t,x)=c^2u_{xx}(t,x)+\beta u(t,x)u_x^2(t,x), \quad t>0,\ 0<x<\ell \qquad \text{(ENL)}$$

   c,β constantes, comprueba que la función $\omega(t,x)=\phi(u(t,x))$ es solución de la ecuación lineal del calor

$$\omega_t(t,x)=c^2\omega_{xx}(t,x), \quad t>0,\ 0<x<\ell \qquad \text{(EL)}$$

   para la *transformación de Hopf-Cole* $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por la expresión

$$\phi(u)=\int_0^u e^{\beta s^2/2c^2}\,ds$$

Problemas

1. Dada la ecuación de tipo Buckley-Leverett generalizada

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x)+\Phi(t,u(t,x))u_x(t,x)=f(t), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\}$$

   con $\Phi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones continuas y $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ inyectiva:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que el problema anterior puede resolverse usando el método de las características.

   (b) **(1.5 Ptos.)** Demuestra que la solución verifica la ecuación implícita:

$$x=\varphi^{-1}(u(t,x)-F(t))+\int_0^t \Phi(r,u(t,x)-F(t)+F(r))\,dr$$

   siendo

$$F(s)=\int_0^s f(r)\,dr$$

   (c) **(0.5 Ptos.)** Encuentra la solución en el caso particular $\Phi(t,u)=\beta(t)u$, β continua, $\varphi(x)=x$ y $f(t)=\cos(t)$.

2. **(2.5 Ptos.)** Las oscilaciones transversales de una cuerda de longitud unidad inicialmente en reposo, de forma que uno de sus extremos está fijo y sobre el otro se ejerce un movimiento oscilatorio se describen matemáticamente mediante las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x)=c^2y_{xx}(t,x), & t>0,\ 0<x<1 \\ y(t,0)=0,\quad y(t,1)=\alpha\,\mathrm{sen}(t), & t>0 \\ y(0,x)=y_t(0,x)=0, & 0<x<1 \end{array}\right\} \qquad (\spadesuit)$$

   donde $y(t,x)$ indica la altura en el instante t del punto x ($c,\alpha>0$ constantes). Encuentra la solución de este problema usando el método de separación de variables.

Sigue detrás ⇒

3. **(2.5 Ptos.)** Consideremos un problema de transmisión de calor por conducción en una semirrecta aislada en el extremo, de forma que la temperatura inicial es constante y durante un periodo de tiempo actúa una fuente de calor:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + \mathcal{X}_{[0,T]}(t)\,\mathrm{sen}(x), & t>0,\ x>0 \\ u(0,x) = u_0, & x>0 \\ u_x(t,0) = 0, & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

siendo $u_0 \in \mathbb{R}$ y $T > 0$ constantes y

$$\mathcal{X}_{[0,T]}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

la función característica del intervalo $[0,T]$. Utiliza la transformada de Laplace para encontrar la solución **acotada** de ($\clubsuit$).

Ayuda: Recordar que la transformada inversa de Laplace del producto de dos funciones es la convolución de las transformadas inversas, es decir, $\mathcal{L}^{-1}(FG) = \mathcal{L}^{-1}(F) * \mathcal{L}^{-1}(G)$. Tener en cuenta además la fórmula

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-a\sqrt{z}}\right)(t) = \frac{a\,e^{-a^2/4t}}{2\sqrt{\pi t^3}}$$

$a > 0$ constante.

4. **(2.5 Ptos.)** Resuelve la siguiente ecuación de Poisson en un dominio rectangular cuyos extremos permanecen fijos:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = x\cos(\omega x), & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & 0<y<1 \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, & 0<x<1 \end{array}\right\}$$

con $\omega > 0$ constante.