Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Ingeniero Industrial
Curso 2004/05
Transformadas Integrales y
Ecuaciones en Derivadas Parciales
6 de julio de 2005

Teoría y cuestiones

1. Dada la siguiente ecuación de ondas con disipación (también llamada *del telégrafo*), sobre la que se asumen condiciones de contorno Dirichlet homogéneas:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) - \beta u_t(t,x), & t>0,\ 0<x<1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

($c, \beta > 0$ constantes), se define la *energía* asociada a una solución mediante la expresión

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(t,x)\,dx + \frac{c^2}{2}\int_0^1 u_x^2(t,x)\,dx$$

(a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que la energía decrece con el tiempo (**Sugerencia:** Es suficiente ver que la derivada de $E(t)$ es negativa).

(b) **(0.5 Ptos.)** Demuestra que para las condiciones iniciales

$$u(0,x) = \operatorname{sen}(\pi x), \qquad u_t(0,x) = 0, \quad 0<x<1$$

se verifica la desigualdad

$$E(t) \le \left(\frac{c\pi}{2}\right)^2, \qquad \forall\ t>0$$

(**Sugerencia:** Usa el apartado anterior).

2. **(1.5 Ptos.)** El problema de estudiar las vibraciones transversales de una viga elástica (o de Euler-Bernoulli) de longitud infinita, con densidad constante $\rho > 0$ y módulo de rigidez $EI > 0$, lleva a plantear el siguiente problema

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x) + \kappa \dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4}(t,x) = q(x), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ y(0,x) = f(x), \quad \dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x) = 0, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\spadesuit)$$

donde q indica la densidad de carga en cada punto, f es la posición inicial de la viga (que inicialmente se encuentra en reposo) y $\kappa = EI/\rho$. Comprueba que la transformada de Fourier de la función y es de la forma:

$$\widehat{y}(t,\xi) = \left(\widehat{f}(\xi) - \frac{\widehat{q}(\xi)}{(2\pi\xi)^4\kappa}\right)\cos\left(4\pi^2\xi^2\kappa\, t\right) + \frac{\widehat{q}(\xi)}{(2\pi\xi)^4\kappa}$$

Problemas

1. Dado el problema,

$$\left.\begin{array}{ll} (1-\varepsilon t)\, u_t(t,x) + x u_x(t,x) = 1, & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = \cos(x^2+1), & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\}$$

con $\varepsilon > 0$ constante:

(a) **(1.5 Ptos.)** Utiliza el método de las características para obtener la solución.

(b) **(0.5 Ptos.)** Calcula el intervalo temporal en el que está definida la solución.

(c) **(0.25 Ptos.)** Utiliza el método de las características para obtener la solución del problema para $\varepsilon = 0$.

(d) **(0.25 Ptos.)** Comprueba que cuando $\varepsilon \to 0$, las soluciones asociadas convergen puntualmente a la solución para $\varepsilon = 0$.

2. **(2.5 Ptos.)** Utiliza la transformada de Laplace para obtener la solución acotada de la siguiente ecuación de ondas en una semirrecta:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + \delta(t-2)\cos(\pi x), & t,x>0 \\ u(t,0) = \operatorname{sen}(1+t), & t>0 \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0, & x>0 \end{array}\right\}$$

siendo δ la función impulso de Dirac.

3. Dado el problema ($\clubsuit$) para la ecuación del telégrafo:

(a) **(2 Ptos.)** Utiliza el método de separación de variables para encontrar la solución para las condiciones iniciales

$$u(0,x) = \operatorname{sen}(\pi x), \qquad u_t(0,x) = 0, \quad 0<x<1$$

suponiendo que $0 < \beta < 2\pi c$.

(b) **(0.35 Ptos.)** Comprueba que la solución $u(t,x)$ calculada en el apartado anterior verifica

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} |u(t,x)|\right) = 0$$

¿Cuál es la interpretación física de este resultado?

(c) **(0.15 Ptos)** Comprueba que la energía de la solución tiende a cero cuando el tiempo crece indefinidamente, es decir, que

$$\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0$$

¿Es esto coherente con el resultado del apartado anterior? ¿Por qué?

4. **(2.5 Ptos.)** Consideremos un problema de transmisión de calor por conducción en un disco de centro cero y radio uno $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$. Esta situación se modeliza mediante la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(t,x,y) = u_{xx}(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y), \quad t>0,\ (x,y)\in D \qquad (1)$$

junto con la condición de contorno de tipo Neumann

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre }]0, +\infty[\times \partial D \tag{2}$$

que indica que el recinto D está aislado, siendo $\mathbf{n}$ el vector normal unitario en cada punto de la frontera de D. Obtén la solución formal del problema (1)-(2) para la distribución inicial de temperaturas

$$u(0,x,y) = \begin{cases} 1, & x^2+y^2 < \frac{1}{4} \\ 0, & \frac{1}{4} \leq x^2+y^2 < 1 \end{cases}$$

Ayuda: Si $\{\mu_{nm}\}_{m=1}^{\infty} \subset]0, +\infty[$ es la sucesión de las soluciones positivas de la ecuación

$$\xi J_n'(\xi) = 0$$

se tiene entonces que las funciones $\psi_{nm}(r) = J_n(\mu_{nm} r)$ son una base ortogonal del espacio $L^2_\omega(0,1)$, con $\omega(r) = r$, de forma que

$$\|\psi\|^2_{L^2_\omega} = \frac{\left(\mu_{nm}^2 - n^2\right) J_n(\mu_{nm})^2}{2\mu_{nm}^2}$$

INDICACIONES

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **4 horas**.
