Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniero Industrial
Curso 2004/05
Transformadas Integrales y
Ecuaciones en Derivadas Parciales
25 de enero de 2005

Teoría y cuestiones

1. Dada la siguiente ecuación de Sine-Gordon con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) - \operatorname{sen}\left(u(t,x)\right), & t>0, 0<x<1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t>0 \end{array}\right\} \qquad \text{(S-L)}$$

se define la *energía* asociada a una solución mediante la expresión

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(t,x)\,dx + \frac{c^2}{2}\int_0^1 u_x^2(t,x)\,dx - \int_0^1 \cos\left(u(t,x)\right)\,dx$$

(a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que la energía se mantiene constante a lo largo del tiempo. **Ayuda:** Es suficiente comprobar que la derivada de $E(t)$ es igual a cero para cada instante t.

(b) **(0.5 Ptos.)** Calcula la energía asociada a la solución de (S-L) para las condiciones iniciales:

$$u(0,x) = \begin{cases} x, & 0<x\leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2<x<1 \end{cases} \qquad u_t(t,x) = 0$$

2. Indica, justificando razonadamente la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) **(0.5 Ptos.)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \cos(nx)\operatorname{sen}(x^2)\,dx = 0$

(b) **(0.5 Ptos.)** Existe una función $f:[-\pi,\pi]\longrightarrow \mathbb{R}$ continua y de clase C^1 a trozos, de forma que $f(0)\neq 0$ y

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)f(x)\,dx = 0, \quad n\geq 1$$

(c) **(0.5 Ptos.)** La serie de Fourier trigonométrica de la extensión par al intervalo $[-\pi,\pi]$ de la función $f(x) = 1+\cos(x^2)$, $x\in[0,\pi]$, converge puntualmente a f en todos los puntos del intervalo $[-\pi,\pi]$.

Problemas

1. Dado el problema,

$$\left.\begin{array}{ll} (1-\varepsilon t)\,u_t(t,x) + x u_x(t,x) = 1, & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = \phi(x), & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\}$$

con $\varepsilon>0$ constante y $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua:

(a) **(2 Ptos.)** Utiliza el método de las características para obtener la solución.

(b) **(0.5 Ptos.)** Calcula el intervalo temporal en el que está definida la solución.

2. **(2.5 Ptos.)** Utiliza la transformada de Laplace para obtener la solución acotada de la siguiente ecuación de ondas en una semirrecta:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + \delta(t-1)\cos(x), & t,x>0 \\ u(t,0) = \operatorname{sen}(1+t), & t>0 \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0, & x>0 \end{array}\right\}$$

siendo δ la función impulso de Dirac.

3. **(2.5 Ptos.)** Resuelve la siguiente ecuación de Poisson en un dominio rectangular en cuyos extremos se verifican condiciones de contorno de tipo Dirichlet:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = x\cos(\alpha y), & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ u(0,y) = u(1,y) = 1, & 0<y<1 \\ u(x,0) = u(x,1) = 1, & 0<x<1 \end{array}\right\}$$

4. **(2.5 Ptos.)** Consideremos un problema de transmisión de calor en un disco de centro cero y radio uno $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\right\}$, modelado por la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(t,x,y) = u_{xx}(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y), \quad t>0,\ (x,y)\in D \qquad (1)$$

con las condiciones de contorno de tipo Robin

$$\beta u + \nabla u\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre }]0,+\infty[\times\partial D \qquad (2)$$

siendo $\beta>0$ constante y $\mathbf{n}$ el vector normal unitario en cada punto de la frontera del dominio D. Obtén la solución formal del problema (1)-(2) de forma que

$$u(0,x,y) = \begin{cases} 1, & x^2+y^2<\frac{1}{4} \\ 0, & \frac{1}{4}\leq x^2+y^2<1 \end{cases}$$

Ayuda: Si $\{\mu_{nm}\}_{m=1}^\infty \subset]0,+\infty[$ es la sucesión de las soluciones positivas de la ecuación

$$\beta J_n(\xi) + \xi J_n'(\xi) = 0$$

se tiene entonces que las funciones $\psi_{nm}(r) = J_n(\mu_{nm}r)$ son una base ortogonal del espacio $L^2_\omega(0,1)$, con $\omega(r) = r$, de forma que

$$\|\psi\|^2_{L^2_\omega} = \frac{\left(\mu_{nm}^2 - n^2 + \beta^2\right)J_n(\mu_{nm})^2}{2\mu_{nm}^2}$$

Indicaciones

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **4 horas**.