Ingeniero Industrial
"Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales"
Curso 2010/11 (J.A. Murillo)

Problemas Tema 7 "El método de separación de variables"

1. Aplica el método de separación de variables para obtener la solución del problema de Laplace

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 & 0 < x < \ell, \quad 0 < y < \ell \\ u(x,0) = u(0,y) = u(\ell,y) = 0 & 0 < x < \ell, \quad 0 < y < \ell \\ u(x,\ell) = x & 0 < x < \ell \end{cases}$$

2. Aplica el método de separación de variables para obtener la solución del problema de difusión de calor:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x), & t > 0, \ 0 < x < \pi \\ u(0,x) = \operatorname{sen}(2x), & 0 < x < \pi \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

3. En el mundo real las vibraciones de una cuerda se amortiguan debido a que las cuerdas no son perfectamente elásticas. Esta situación se modeliza mediante la ecuación de ondas:

$$u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) - 2k u_t(t,x), \qquad t > 0, \ 0 < x < l$$

con $k < \frac{\pi c}{l}$ y donde el término $-2ku_t$ representa las fuerzas de fricción que causan dicho amortiguamiento. Aplica el método de separación de variables para obtener la solución general de la ecuación anterior sujeta a las condiciones de contorno:

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \qquad t \geq 0$$

4. Consideremos el problema de la transmisión de calor en una placa rectangular, de forma que únicamente es apreciable la transmisión de calor a lo largo del eje OX. Suponiendo que la distribución inicial de temperatura sobre la placa es constante y que sus extremos se mantienen a temperatura constante, el problema se modeliza matemáticamente mediante la expresión,

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x), & 0 < x < \ell, \ t > 0, \\ u(0,x) = T_1, & 0 < x < \ell, \\ u(t,0) = u(t,\ell) = T_2, & t > 0, \end{array}\right\}$$

donde T_1, T_2 son constantes y $u(t,x)$ indica la temperatura de la placa en el instante t en los puntos situados a una distancia x del origen. Calcula la solución formal de este problema usando el método de separación de variables.

5. Sea el siguiente problema de condiciones de contorno homogéneas para la ecuación de Klein-Gordon,

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = 1.23 u_{xx}(t,x) + 0.25 u(t,x), & 0 < t, \ 0 < x < \ell \\ u(t,0) = u(t,\ell) = 0, & 0 < t \end{array}\right\} \qquad \text{(K-G)}$$

Si $\phi(t,x)$ es una solución de (K-G) verificando la condición inicial $u(0,x) = \operatorname{sen} x$ y $\psi(t,x)$ es otra solución, de forma que, $\psi(0,x) = \cos x$, determina una solución del problema (K-G) que verifique la condición inicial,

$$u(0,x) = -0.89 \operatorname{sen} x + \pi^2 \cos x$$

6. Consideremos el problema de transmisión del calor en una barra acotada, modelado por la ecuación,

$$u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), \quad 0 < t, \ 0 < x < \ell \qquad (1)$$

Al tener en cuenta la *ley de enfriamiento de Newton* sobre los extremos de la barra, suponiendo que la temperatura en el exterior de la misma es constante e igual a cero, se obtienen las siguientes condiciones de contorno de tipo Robin

$$u(t,0) + u_x(t,0) = 0, \quad u(t,\ell) + u_x(t,\ell) = 0, \quad 0 < t \qquad (2)$$

   (a) Aplica el método de separación de variables para resolver la ecuación (1), teniendo en cuenta las condiciones de contorno (2).
   (b) Escribe el problema de Sturm-Liouville resultante para la función asociada a la variable espacial $X(x)$ y obtén sus autovalores y autofunciones.
   (c) Dada una función $u_0 \in L^2(0,\ell)$, determina el valor de la solución formal del problema (1)-(2) para la condición inicial,

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 < x < \ell$$

7. Consideremos el problema de transmisión del calor en una barra acotada, modelado por la ecuación,

$$u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), \quad 0 < t, \ 0 < x < \ell. \qquad (3)$$

Sobre la barra supondremos que el extremo de la izquierda se mantiene a temperatura constante, lo que nos da la condición de contorno,

$$u(t,0) = u_0, \quad t > 0 \qquad \text{(C1)}$$

mientras que por la derecha está aislada,

$$u_x(t,\ell) = 0, \quad t > 0 \qquad \text{(C2)}$$

   (a) Aplica el método de separación de variables para resolver la ecuación (3), teniendo en cuenta las condiciones de contorno (C1) y (C2).
   (b) Escribe el problema de Sturm-Liouville resultante para la función asociada a la variable espacial $X(x)$ y obtén sus autovalores y autofunciones.
   (c) Dada una función $g \in L^2(0,\ell)$, determina el valor de la solución formal del problema (3)-(C1)-(C2) para la condición inicial,

$$u(0,x) = g(x), \quad 0 < x < \ell$$

8. Resuelve el problema de transmisión de calor en una barra acotada sobre la que actúa una fuente de calor, modelado por la ecuación:

$$u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + \operatorname{sen}(mx), \qquad 0 < t,\ 0 < x < \pi$$

con m un número natural constante. Sobre la barra supondremos que inicialmente se encuentra a temperatura constante:

$$u(0,x) = u_0, \qquad 0 < x < \pi$$

y que está aislada en los extremos:

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \qquad t > 0$$

9. Consideremos un problema de transmisión de calor en una barra unidimensional aislada en los extremos sobre la que se tiene una fuente de calor cuya intensidad depende linealmente de la temperatura,

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + \beta u(t,x), & 0 < t,\ 0 < x < \ell \\ u_x(t,0) = u_x(t,\ell) = 0, & 0 < t \end{array}\right\}$$

(a) Resuelve el problema anterior suponiendo que inicialmente la distribución de temperatura sobre la barra viene dada por una función u_0, es decir, se verifica la condición inicial:

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 < x < \ell$$

(b) Suponiendo que u_0 es constante, calcula el valor del límite

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x)$$

para cada $0 < x < \ell$, en función de la constante β. Interpreta el resultado en términos físicos.

10. Consideremos el problema no lineal,

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + \beta u_x^2(t,x), & 0 < t,\ 0 < x < \ell \\ u(0,x) = u_0, & 0 < x < \ell \\ u(t,0) = u(t,\ell) = 0, & t > 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(PNL)}$$

con $c, \beta \in \mathbb{R}$ constantes, que modela la evolución de la temperatura en un sistema equipado con un termostato sensible al gradiente térmico, que inicialmente está a una temperatura constante $u_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Si u es una solución de (PNL), comprueba que $\omega(t,x) = \phi(u(t,x))$ es solución del problema lineal

$$\left.\begin{array}{ll} \omega_t(t,x) = c^2 \omega_{xx}(t,x), & 0 < t,\ 0 < x < \ell \\ \omega(0,x) = \phi(u_0), & 0 < x < \ell \\ \omega(t,0) = \omega(t,\ell) = 1, & t > 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(PL)}$$

siendo $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la *transformación de Hopf-Cole* definida como $\phi(u) = e^{\beta u/c^2}$.

(b) Utiliza el resultado anterior para obtener la solución formal del problema (PNL) a partir de la de (PL).

11. Encuentra la solución del siguiente problema de Laplace en un semicírculo:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0, & \text{en } D \\ u = g, & \text{sobre } \partial D \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \delta^2,\ y > 0\}$ ($\delta > 0$ constante), y

$$g(x,y) = \begin{cases} 0, & x^2 + y^2 = \delta^2,\ y > 0 \\ 1, & -\delta < x < \delta,\ y > 0 \end{cases}$$

Solución: Al ser el dominio un semicírculo, reescribimos el problema usando coordenadas

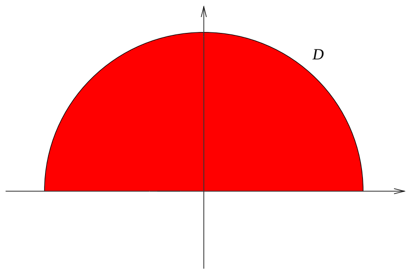

Figura 1: Dominio semicircular D

polares tomando $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, lo que nos lleva al nuevo problema:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{rr}(r,\theta) + \dfrac{1}{r}\, u_r(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, & 0 < r < \delta,\ 0 < \theta < \pi \\ u(\delta,\theta) = 0, & 0 < \theta < \pi \\ u(r,0) = u(r,\pi) = 1, & 0 < r < \delta \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit\clubsuit)$$

Hacemos ahora el cambio $v(r,\theta) = u(r,\theta) - 1$ y escribimos la ecuación y las condiciones de contorno que verifica esta nueva función:

$$\left.\begin{array}{ll} v_{rr}(r,\theta) + \dfrac{1}{r}\, v_r(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}\, v_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, & 0 < r < \delta,\ 0 < \theta < \pi \\ v(\delta,\theta) = -1, & 0 < \theta < \pi \\ v(r,0) = v(r,\pi) = 0, & 0 < r < \delta \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit\clubsuit\clubsuit)$$

Separamos ahora las variables en ($\clubsuit\clubsuit\clubsuit$): $v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, y al sustituir en la ecuación en derivadas parciales, y dividir por v, obtenemos la igualdad

$$\frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{rR'(r)}{R(r)} = \frac{-\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \text{cte} \qquad (\heartsuit)$$

De las condiciones de contorno homogéneas:

$$R(r)\Theta(0) = R(r)\Theta(\pi) = 0, \quad 0 < r < \delta$$

luego $\Theta(0) = \Theta(\pi) = 0$. Tenemos, pues, el siguiente sistema de Sturm-Liouville regular con condiciones de contorno separadas de tipo Dirichlet:

$$\left.\begin{array}{l} \Theta''(\theta) = -\lambda\Theta(\theta) \\ \Theta(0) = 0 \\ \Theta(\pi) = 0 \end{array}\right\}$$

llamando λ a la constante en ($\heartsuit$). Es sencillo comprobar que los autovalores de este sistema son de la forma $\lambda_n = n^2$, y las autofunciones asociadas $\Theta_n(\theta) = \text{sen}(n\theta)$. Sustituyendo el valor encontrado para los autovalores en ($\heartsuit$) se tiene la ecuación diferencial de tipo Euler:

$$r^2R''(r) + rR'(r) - n^2R(r) = 0$$

que una vez resuelta proporciona las funciones:

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}$$

con $A_n, B_n \in \mathbb{R}$ constantes. A continuación proponemos como solución de ($\clubsuit\clubsuit\clubsuit$) la función

$$v(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right) \text{sen}(n\theta)$$

Dado que esta función debe estar definida en el punto $(0,0)$, se tiene que, necesariamente $B_n = 0$. Además, debe verificar todas las condiciones de contorno, luego:

$$-1 = v(\delta,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \delta^n \,\text{sen}(n\theta), \quad 0 < \theta < \pi$$

De la igualdad anterior se deduce que $A_n\delta^n$ debe ser igual a los coeficientes de la serie de Fourier de la extensión impar de la función constante igual a -1, es decir,

$$A_n\delta^n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\text{sen}(n\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{\cos(n\theta)}{n}\right|_0^{\pi}\right) = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n\pi}$$

Por tanto:

$$\boxed{v(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left((-1)^n - 1\right) r^n}{n\pi\delta^n} \text{sen}(n\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4r^{2k+1}}{(2k+1)\pi\delta^{2k+1}} \text{sen}((2k+1)\theta)}$$

y la solución de ($\clubsuit\clubsuit$), es decir, la de ($\clubsuit$) dada en coordenadas polares, será:

$$\boxed{u(r,\theta) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4r^{2k+1}}{(2k+1)\pi\delta^{2k+1}} \text{sen}((2k+1)\theta), \quad 0 < r < \delta,\ 0 < \theta < \pi}$$

La expresión en coordenadas cartesianas es algo más complicada. En efecto, usando la relación entre coordenadas cartesianas y polares tenemos que, para cada $(x,y) \in D$:

$$\boxed{u(x,y) = \begin{cases} 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4\left(x^2+y^2\right)^{(2k+1)/2}}{(2k+1)\pi\delta^{2k+1}} \text{sen}((2k+1)\arctan(y/x)), & x > 0 \\ 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4y^{2k+1}}{(2k+1)\pi\delta^{2k+1}} \text{sen}((-1)^k(2k+1)), & x = 0 \\ 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4\left(x^2+y^2\right)^{(2k+1)/2}}{(2k+1)\pi\delta^{2k+1}} \text{sen}((2k+1)(\pi + \arctan(y/x))), & x < 0 \end{cases}}$$

12. Resuelve el siguiente problema con condiciones de contorno no homogéneas para la ecuación de Klein-Gordon en el intervalo unidad ($\beta > 1$):

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x) - \beta^2 u(t,x), & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = \text{sen}(t), & t > 0 \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0, & 0 < x < 1 \end{array}\right\}$$

13. Resuelve la siguiente ecuación de Poisson en un dominio rectangular cuyos extremos permanecen fijos:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = x\cos(\omega x), & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & 0 < y < 1 \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, & 0 < x < 1 \end{array}\right\}$$

con $\omega > 0$ constante.

14. En el caso en que existe disipación, las oscilaciones transversales de una cuerda elástica de longitud unidad inicialmente en reposo, de forma que uno de sus extremos está fijo y sobre el otro se ejerce un movimiento oscilatorio, se describen matemáticamente mediante las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = c^2 y_{xx}(t,x) - \alpha y_t(t,x), & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ y(t,0) = 0, \quad y(t,1) = \text{sen}(t), & t > 0 \\ y(0,x) = y_t(0,x) = 0, & 0 < x < 1 \end{array}\right\} \qquad (\spadesuit)$$

donde $y(t,x)$ indica la altura en el instante t del punto x ($c, \alpha > 0$ constantes). Encuentra la solución de este problema usando el método de separación de variables.

15. Resuelve la siguiente ecuación de Poisson en un dominio circular cuyos extremos permanecen fijos:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = \frac{1}{2} - \sqrt{x^2+y^2}, & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

con $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$.

(**Ayuda:** Usar coordenadas polares, teniendo en cuenta que al separar las variables, la función asociada al radio debe estar definida en cero y la función asociada al ángulo y su derivada son 2π-periódicas).

16. Se considera un problema de transmisión de calor sobre una barra unidimensional de longitud π, de forma que inicialmente la temperatura es constante en la barra. Además uno de los extremos está aislado y en el otro es conocido el flujo térmico, siendo la formulación matemática del problema la siguiente:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), & t > 0,\ 0 < x < \pi \\ u(0,x) = u_0, & 0 < x < \pi \\ \left.\begin{array}{l} u_x(t,0) = 0 \\ u_x(t,\pi) = \text{sen}(t) \end{array}\right\} & t > 0 \end{array}\right\} \qquad (\spadesuit)$$

con $c, u_0 > 0$ constantes.

(a) Comprueba que la función

$$\omega(t,x) = u(t,x) - \frac{x^2}{2\pi}\,\mathrm{sen}(t)$$

con u solución de (♠), verifica la ecuación del calor con un término fuente y condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneas.

(b) Utiliza el método de separación de variables para obtener ω.

(c) Utiliza los apartados anteriores para escribir la expresión de la solución del problema original (♠).

17. Resuelve el siguiente problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson en un disco perforado de semiejes $0 < \alpha < \beta$:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

con $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha^2 < x^2 + y^2 < \beta^2\right\}$ y

$$g(x,y) = \left\{\begin{array}{ll} 1 - \sqrt{x^2+y^2}, & \text{si } y > 0 \\ 0, & \text{si } y \leq 0 \end{array}\right.$$

Solución: Como en el problema 11, al tener un dominio circular, en este caso un disco perforado, reescribimos el problema usando coordenadas polares:

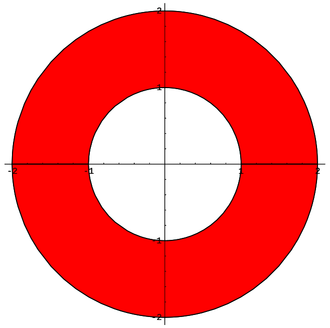

Figura 2: Dominio anular para $\alpha = 1$, $\beta = 2$

$$\left.\begin{array}{ll} u_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r}\,u_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta}(r,\theta) = g(r,\theta), & \alpha < r < \beta,\ 0 < \theta < \pi \\ u(\alpha,\theta) = u(\beta,\theta) = 0, & 0 < \theta < \pi \end{array}\right\} \qquad (\heartsuit\clubsuit)$$

siendo

$$g(r,\theta) = \left\{\begin{array}{ll} 1 - r, & \text{si } 0 < \theta < \pi \\ 0, & \text{si } \pi < \theta < 2\pi \end{array}\right.$$

A continuación se separan las variables en la ecuación homogénea asociada a (♡♣), obteniéndose la misma igualdad (♡) que en el problema 11. Por otra parte, dado que las coordenadas polares (r,θ) y $(r,\theta+2\pi)$ corresponden al mismo punto para cada $\alpha < r < \beta$, $0 < \theta < 2\pi$, se tiene que

$$R(r)\Theta(\theta) = R(r)\Theta(\theta+2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\theta) = \Theta(\theta+2\pi)$$

lo que nos lleva formular el siguiente sistema de Sturm-Liouville regular con condiciones de contorno periódicas para la función Θ:

$$\left.\begin{array}{ll} \Theta''(\theta) = -\lambda\Theta(\theta), & 0 < \theta < 2\pi \\ \Theta(0) - \Theta(2\pi) = 0, & \\ \Theta'(0) - \Theta'(2\pi) = 0. & \end{array}\right\}$$

Analizando el sistema vemos que $\lambda_0 = 0$ es un autovalor, con $V_{\lambda_0} = \{A : A \in \mathbb{R}\}$, por lo que la autofunción $\Theta_0(\theta) = 1$ proporciona una base del espacio V_{λ_0}. El resto de autovalores son $\lambda_n = n^2$, con $V_{\lambda_n} = \{A\cos(n\theta) + B\,\mathrm{sen}(n\theta) : A, B \in \mathbb{R}\}$, luego tomando $\Theta_n(\theta) = \cos(n\theta)$, $\varphi_n(\theta) = \mathrm{sen}(n\theta)$ tenemos una base ortogonal de autofunciones en cada subespacio.

Seguidamente, y dado que la ecuación en derivadas parciales de (♡♣) es completa, se propone la solución

$$u(r,\theta) = R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\cos(n\theta) + P_n(r)\,\mathrm{sen}(n\theta)$$

con $R_n(r)$, $n \geq 0$, y $P_n(r)$, $n \geq 1$, funciones a determinar. Exigiendo que la función anterior sea solución de la ecuación completa, y dado que,

- $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) = R_0'(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n'(r)\cos(n\theta) + P_n'(r)\,\mathrm{sen}(n\theta)$
- $\displaystyle \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,\theta) = R_0''(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n''(r)\cos(n\theta) + P_n''(r)\,\mathrm{sen}(n\theta)$
- $\displaystyle \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 R_n(r)\cos(n\theta) + n^2 P_n(r)\,\mathrm{sen}(n\theta)$

se llega a la ecuación

$$\begin{aligned} g(r,\theta) = \left(R_0''(r) + \frac{1}{r}R_0'(r)\right) &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(R_n''(r) + \frac{1}{r}R_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}R_n(r)\right)\cos(n\theta) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(P_n''(r) + \frac{1}{r}P_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}P_n(r)\right)\mathrm{sen}(n\theta) \end{aligned}$$

Es decir, para cada $\alpha < r < \beta$ fijo, el expresión de la derecha corresponde a la serie de Fourier trigonométrica de la función $\theta \rightsquigarrow g(r,\theta)$, lo que nos lleva a escribir las siguientes identidades:

- $\displaystyle R_0''(r) + \frac{1}{r}R_0'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r,\theta)\,d\theta = \frac{1-r}{2}$
- $\displaystyle R_n''(r) + \frac{1}{r}R_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}R_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(r,\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-r)\cos(n\theta)\,d\theta = 0$

- $P_n''(r) + \frac{1}{r}P_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}P_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(r,\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-r)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta$
$$= \frac{(1-r)\,(1-(-1)^n)}{\pi}$$

Por otra parte, de las condiciones de contorno del problema (♡♣) se obtienen condiciones de contorno para las anteriores ecuaciones diferenciales:

$$0 = u(\alpha,\theta) = R_0(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\alpha)\cos(n\theta) + P_n(\alpha)\,\mathrm{sen}(n\theta)$$

$$0 = u(\beta,\theta) = R_0(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\beta)\cos(n\theta) + P_n(\beta)\,\mathrm{sen}(n\theta)$$

es decir, $R_n(\alpha) = R_n(\beta) = 0$, $n \geq 0$, y $P_n(\alpha) = P_n(\beta) = 0$ para cada $n \geq 1$. Con estos elementos, es inmediato comprobar que

$$\boxed{R_0(r) = \frac{r^2}{8} - \frac{r^3}{18} + \alpha_0\log(r) + \beta_0}$$

con

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{1}{\log(\beta/\alpha)}\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{8} - \frac{\beta^3-\alpha^3}{18}\right)} \qquad \boxed{\beta_0 = \frac{\alpha^3}{18} - \frac{\alpha^2}{8} - \alpha_0\log(\alpha)}$$

En cuanto a R_n, vemos que es solución de una ecuación diferencial de Euler homogénea, por lo que el cambio estándar $R_n(r) = \varphi_n(\log(r))$ nos proporciona la solución

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}$$

cuyas constantes, como consecuencia de las condiciones de contorno, deben verificar el sistema lineal

$$0 = R_n(\alpha) = A_n\alpha^n + B_n\alpha^{-n}$$
$$0 = R_n(\beta) = A_n\beta^n + B_n\beta^{-n}$$

que es compatible determinado, luego

$$\boxed{R_n(r) = 0, \quad n \geq 1}$$

Finalmente, P_n verifica una ecuación de diferencial de Euler completa, cuya parte homogénea coincide con la de R_n, por lo que su solución general será la misma. Para buscar una solución particular de la ecuación completa, siguiendo el método de los coeficientes indeterminados, proponemos una solución de la forma

$$\phi_n(r) = C_n r^3 + D_n r^2 + E_n r + F_n$$

Tomando

$$\boxed{\gamma_n = \frac{1-(-1)^n}{\pi}}$$

las condiciones que deben verificar las constantes para que ϕ_n sea solución de la ecuación completa de P_n son:

✓ $(9-n^2)\,C_n = -\gamma_n$ ✓ $(4-n^2)\,D_n = \gamma_n$ ✓ $(1-n^2)\,E_n = 0$ ✓ $F_n = 0$

luego:

- Si $n = 1$, $\gamma_1 = 2/\pi$ y
$$\boxed{\phi_1(r) = \frac{-r^3}{4\pi} + \frac{2r^2}{3\pi}}$$
- Si $n = 2$, $\gamma_2 = 0$ y
$$\boxed{\phi_2(r) = 0}$$
- Si $n = 3$, $\gamma_3 = 2/\pi$, con lo que la primera de las ecuaciones anteriores proporciona la contradicción $0C_3 = -2/\pi$. Para solventar esto, en este caso concreto, proponemos la solución particular
$$\phi_3(r) = (C_3 + D_3\log(r))\,r^3 + E_3r^3 + F_3r + G_3$$
que, tras calcular el valor de las constantes nos proporciona la función
$$\boxed{\phi_3(r) = \frac{-r^3\log(r)}{3\pi} - \frac{2r^2}{5\pi}}$$
- Si $n \geq 4$,
$$\boxed{\phi_n(r) = \gamma_n\left(\frac{-r^3}{9-n^2} + \frac{r^2}{4-n^2}\right)}$$
En particular, para cada $k \geq 2$, se tiene
$$\boxed{\phi_{2k}(r) = 0} \qquad \boxed{\phi_{2k+1}(r) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-r^3}{9-(2k+1)^2} + \frac{r^2}{4-(2k+1)^2}\right)}$$

Resumiendo,

$$\boxed{P_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n} + \phi_n(r)}$$

con

$$\boxed{\phi_{2k}(r) = 0, \quad (k \geq 1)}$$

$$\boxed{\phi_{2k+1}(r) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-r^3}{9-(2k+1)^2} + \frac{r^2}{4-(2k+1)^2}\right), \quad (k \geq 0,\ k \neq 1)}$$

$$\boxed{\phi_3(r) = \frac{-r^3\log(r)}{3\pi} - \frac{2r^2}{5\pi}}$$

Para determinar el valor de las constantes se utilizan las condiciones de contorno:

$$0 = P_n(\alpha) = A_n\alpha^n + B_n + \alpha^{-n} + \phi_n(\alpha)$$
$$0 = P_n(\beta) = A_n\beta^n + B_n\beta^{-n} + \phi_n(\beta)$$

que, junto con las expresiones de las funciones ϕ_n anteriormente calculadas, proporcionan los siguientes valores

$$\boxed{A_{2k} = B_{2k} = 0} \qquad \boxed{A_{2k+1} = \frac{\beta^{-(2k+1)}\phi_{2k+1}(\alpha) - \alpha^{-(2k+1)}\phi_{2k+1}(\beta)}{(\alpha\beta^{-1})^{2k+1} - (\beta\alpha^{-1})^{2k+1}}}$$

$$\boxed{B_{2k+1} = \frac{\alpha^{2k+1}\phi_{2k+1}(\beta) - \beta^{2k+1}\phi_{2k+1}(\alpha)}{(\alpha\beta^{-1})^{2k+1} - (\beta\alpha^{-1})^{2k+1}}}$$

En definitiva, la solución de (♡♣) es de la forma

$$\boxed{u(r,\theta) = R_0(r) + \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\alpha_k r^{2k+1} + \beta_k r^{-(2k+1)} + \phi_{2k+1}(r)\Big)\operatorname{sen}\left((2k+1)\theta\right)}$$

18. Sea el siguiente problema de Laplace en un dominio semicircular con condiciones de contorno mixtas Dirichlet+Neumann:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in D \\ \nabla u(x,y)\cdot \boldsymbol{n} = 0, & x^2+y^2 = 1,\ y > 0 \\ u(x,0) = \cos(2\pi x), & -1 < x < 1 \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{DN})$$

con $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1,\ y > 0\right\}$ y siendo $\boldsymbol{n}$ el vector normal unitario en cada punto de la frontera.

(a) Reescribe el problema en coordenadas polares, teniendo en cuenta que la condición de contorno de tipo Neumann sobre la parte superior de la frontera de D se convierte en

$$u_r(1,\theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi$$

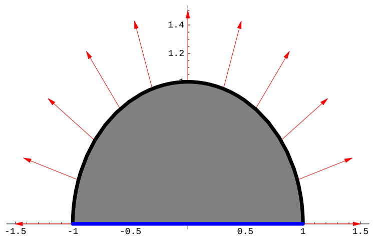

Figura 3: Conjunto D

(b) Comprueba que, si $u(r,\theta)$ es la solución de $(\mathcal{DN})$ dada en coordenadas polares, la función

$$\omega(r,\theta) = u(r,\theta) - \cos(2\pi r)$$

es solución de una ecuación de Poisson (Laplace no homogénea) con condiciones de contorno mixtas Dirichlet+Neumann homogéneas, es decir, se verifica que

$$\left.\begin{array}{ll} \omega_r(1,\theta) = 0, & 0 < \theta < \pi \\ \omega(r,0) = \omega(r,\pi) = 0, & 0 < r < 1 \end{array}\right\}$$

(c) Utiliza en Método de separación de variables para obtener el valor de $\omega(r,\theta)$.