Ingeniero Industrial
"Transformadas Integrales y
Ecuaciones en Derivadas Parciales"
Curso 2010/11 (J.A. Murillo)

Problemas Temas 9-10 "Transformadas de Laplace y Fourier"

1. Una de las ecuaciones más importantes en física de partículas es la de Klein-Gordon, que en el caso unidimensional se escribe de la forma:

$$u_{tt}(t,x) - c^2 u_{xx}(t,x) + m^2 u(t,x) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

siendo m, c constantes reales. Obtén el valor de la transformada de Fourier de la solución de dicha ecuación, es decir,

$$\widehat{u}(t,\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x) e^{-\mathrm{i}x\xi}\, dx \qquad (\mathcal{F})$$

para las condiciones iniciales:

$$u(0,x) = \phi(x), \qquad u_t(0,x) = 0$$

donde ϕ es una función real de variable real de forma que $\phi \in L^1(\mathbb{R})$.

2. Utiliza la transformada de Laplace para resolver el siguiente problema para la ecuación lineal del transporte con coeficientes constantes:

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t(t,x) + (1+x)u_x(t,x) + u(t,x) = 0, & t, x > 0 \\ u(0,x) = 0, & x > 0 \\ u(t,0) = \left\{\begin{array}{ll} t, & t < a \\ 0, & t \geq a \end{array}\right. & t > 0 \end{array}\right.$$

siendo $a > 0$ una constante.

3. La ecuación unidimensional del telégrafo, que aparece al estudiar la transmisión de señales a lo largo de un hilo, es de la forma:

$$u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) - \beta u_t(t,x) - \gamma u(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

con $c, \beta, \gamma \geq 0$ constantes. Obtén el valor de la transformada de Fourier de la solución de dicha ecuación para las condiciones iniciales

$$u(0,x) = \phi(x), \qquad u_t(0,x) = 0$$

donde $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ y $\beta^2 - 4c^2\gamma < 0$.

4. Utiliza la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas para la ecuación de ondas unidimensional no homogénea en una semirrecta, teniendo en cuenta que *se buscan soluciones acotadas*:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + x \operatorname{sen}(t), & t, x > 0 \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0, & x > 0 \\ u(t,0) = \operatorname{sen}(t), & t > 0 \end{array}\right\} \qquad (4.1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + \cos(t+\pi) \operatorname{sen}(x), & t, x > 0 \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0, & x > 0 \\ u(t,0) = \phi(t), & t > 0 \end{array}\right\} \qquad (4.2)$$

donde $\phi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función arbitraria que admite transformada de Laplace.

5. Consideremos la ecuación lineal del transporte

$$u_t(t,x) + 2u_x(t,x) = 0$$

que modeliza la evolución de la concentración de un contaminante en suspensión en un fluido unidimensional dispuesto a lo largo del semieje real positivo. Se supone que inicialmente la concentración es constante e igual a cinco unidades, esto es, $u(0,x) = 5$, $x \geq 0$, y que no se realizan nuevas aportaciones desde el origen de la conducción, $u(t,0) = 0$, $t \geq 0$. Aplica la transformada de Laplace para resolver este problema:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = 2u_x(t,x) = 0, & t, x > 0 \\ u(0,x) = 5, & x > 0 \\ u(t,0) = 0, & t > 0 \end{array}\right\}$$

6. Fijados un instante $t_0 \geq 0$ y un valor del parámetro $0 < \varepsilon < t_0$, se considera la función $\phi_{t_0,\varepsilon}$, definida como

$$\begin{array}{rccl} \phi_{t_0,\varepsilon} : & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \rightsquigarrow & \phi_{t_0,\varepsilon}(t) = \left\{\begin{array}{ll} 1/2\varepsilon, & \text{si } |t - t_0| < \varepsilon \\ 0, & \text{en otro caso} \end{array}\right. \end{array}$$

(a) Comprueba que $\phi_{t_0,\varepsilon}$ converge puntualmente, cuando $\varepsilon \to 0$, a la delta de Dirac centrada en t_0:

$$\delta_{t_0}(t) = \left\{\begin{array}{ll} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{array}\right.$$

(b) Calcula la transformada de Laplace de la función $\phi_{t_0,\varepsilon}$ y comprueba que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}(\phi_{t_0,\varepsilon})(z) = e^{-t_0 z}, \quad \text{si } \operatorname{Re} z > 0$$

De aquí se deduce la relación $\mathcal{L}(\delta_{t_0})(z) = e^{-t_0 z}$, $\operatorname{Re} z > 0$.

(c) Utiliza los resultados de los apartados anteriores para resolver el problema:

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) - 2y(t) = \delta_\pi(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array}\right\}$$

7. Dado el siguiente problema para la ecuación de ondas:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x),\quad u_t(0,x)=0, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\}$$

Se pide:

(a) Utiliza la transformada de Fourier para probar que la solución del problema transformado es
$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(\xi)\cos(ct\xi)$$

(b) Usa las propiedades de la transformada inversa de Fourier para obtener la solución del problema anterior.

8. Sabiendo que $\delta(t)$ es la delta de Dirac en el punto cero, utiliza la transformada de Laplace para resolver el problema

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{di}{dt}(t) + 6i(t) + 5\displaystyle\int_0^t i(s)\,ds = \delta(t) \\ i(0) = 0 \end{array}\right\}$$

que corresponde el modelo matemático de un circuito de tipo RCL, donde $L = 1$ milihenrios, $R = 6$ ohmios y $C = 1/5$ microfaradios, siendo $i(t)$ la intensidad del circuito en cada instante $t > 0$.

9. Consideremos el problema de determinar las vibraciones transversales de una viga elástica de longitud potencialmente infinita, formulado como:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) + u_{xxxx}(t,x) = 0, & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x),\quad u_t(0,x)=0, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\heartsuit)$$

Se pide:

(a) Demuestra la igualdad:
$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(\xi)\cos(t^2\xi)$$

(b) Sabiendo que la transformada inversa de $\cos(t^2\xi)$ es igual a la función
$$\frac{\cos\left(\frac{x^2}{4t} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2t}}$$
calcula la solución del problema $(\heartsuit)$.

10. Utiliza la transformada de Laplace para resolver el siguiente problems de condición inicial y de contorno en el origen para la ecuación lineal del transporte:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + (1+x)u_x(t,x) + u(t,x) = 0, & t,x>0 \\ u(0,x) = 0, & x>0 \\ u(t,0) = \phi(t), & t>0 \end{array}\right\}$$

siendo $a > 0$ una constante y
$$\phi(t) = \begin{cases} t, & t<a \\ a, & t\geq a \end{cases}$$

11. Consideremos un problema unidimensional de transmisión de calor por conducción en una barra aislada en los extremos, de forma que la temperatura inicial es constante y durante un periodo de tiempo actúa una fuente de calor:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + \beta\mathcal{X}_{[0,T]}(t), & t>0,\ 0<x<1 \\ u(0,x) = u_0, & 0<x<1 \\ u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

siendo $\beta, u_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$ constantes y
$$\mathcal{X}_{[0,T]}(t) = \begin{cases} 1, & 0\leq t\leq T \\ 0, & t>T \end{cases}$$
la función característica del intervalo $[0,T]$.

(a) Utiliza la transformada de Laplace para encontrar la solución de $(\clubsuit)$. ¿Qué pasará con la temperatura de la barra cuando pase mucho tiempo $(t\to\infty)$?

(b) Resuelve ahora el caso en que la temperatura inicial no es constante, $u(0,x) = \cos(\pi x)$ y estudia el comportamiento asintótico del sistema, es decir, cuál es el valor de la solución en cada $0 < x < 1$ cuando $t \to \infty$.

12. Dado el siguiente problema para la ecuación de ondas sobre la semirrecta $[0,+\infty[$:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = c^2 y_{xx}(t,x) + \mathcal{X}_{[0,T]}(t)\cos(\omega x), & t>0,\ x>0 \\ y(0,x) = y_t(0,x) = 0, & x>0 \\ y(t,0) = \varphi(t), & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\bigstar)$$

con $c,\omega,T > 0$ constantes, $\mathcal{X}_{[0,T]}$ la función característica del intervalo $[0,T]$,
$$\mathcal{X}_{[0,T]}(t) = \begin{cases} 1, & 0\leq t\leq T \\ 0, & t>T \end{cases}$$
y $\varphi : [0,+\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria, utiliza la transformada de Laplace para encontrar la solución *acotada* de $(\bigstar)$.

13. Utiliza la transformada de Laplace para obtener la *solución acotada* de la siguiente ecuación de ondas en una semirrecta:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = c^2 y_{xx}(t,x) + \delta(t-2)\cos(\pi x), & t,x>0 \\ y(t,0) = \operatorname{sen}(1+t), & t>0 \\ y(0,x) = y_t(0,x) = 0, & x>0 \end{array}\right\}$$

siendo δ la función impulso de Dirac.

14. La evolución de la temperatura en una barra unidimensional de longitud unidad aislada en los extremos y sobre la que actúa durante un cierto periodo de tiempo una fuente de calor se describe matemáticamente mediante el siguiente problema (suponiendo que solamente se transmite calor por difusión):

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + \alpha\mathcal{X}_{[T_1,T_2]}(t), & t>0,\ 0<x<1 \\ u(0,x) = \cos(\pi x), & 0<x<1 \\ u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\spadesuit)$$

con $c > 0$, $0 < T_1 < T_2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ constantes, donde $u(t,x)$ indica la temperatura del punto x en el instante t y

$$\mathcal{X}_{[T_1,T_2]}(t) = \begin{cases} 1, & T_1 \leq t \leq T_2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es la función característica del intervalo temporal $[T_1, T_2]$ durante el cual actúa sobre la barra una fuente de calor de intensidad α.

(a) Suponiendo que $T_2 < \infty$, utiliza la transformada de Laplace para encontrar la solución de (♠).

(b) **(0.5 Ptos.)** Encuentra la solución de (♠) para $T_2 = \infty$.

(c) Determina el estado asintótico del sistema, es decir, el valor de la temperatura en cada punto cuando $t \to +\infty$ para la solución obtenida en cada uno de los anteriores apartados. ¿Observas alguna diferencia? ¿Puedes darle una interpretación física?

Solución: Aplicando la transformada de Laplace sobre la variable temporal t se define la siguiente función transformada

$$\mathcal{U}(x,z) = \mathcal{L}(u(\cdot,x))(z) = \int_0^{+\infty} u(t,x)e^{-tz}\,dt$$

Por otra parte,

- $\mathcal{L}(u_t(\cdot,x))(z) = -u(0,x) + z\mathcal{U}(x,z)$,
- $\mathcal{L}(u_{xx}(\cdot,x))(z) = \dfrac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2}(x,z)$

de donde, aplicando la transformada de Laplace sobre la ecuación del calor, teniendo en cuenta su linealidad, se obtine la ecuación transformada

$$-u(0,x) + z\mathcal{U}(x,z) = c^2\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2}(x,z) + \frac{\alpha\left(e^{-T_1 z} - e^{-T_2 z}\right)}{z}$$

sobre el dominio complejo $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Teniendo en cuenta la condición inicial del problema original se reecribe la ecuación transformada

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2}(x,z) = \frac{z}{c^2}\mathcal{U}(x,z) + \frac{\alpha\left(e^{-T_1 z} - e^{-T_2 z}\right)}{c^2 z} - \frac{\cos(\pi x)}{c^2} \qquad (\mathcal{PT})$$

como una ecuación diferencial lineal de orden dos (respecto de la variable espacial x) con coeficientes constantes y completa. Para obtener su solución general se calcula en primer lugar la solución general de la ecuación homogénea asociada, que claramente es de la forma

$$Ae^{x\sqrt{z}/c} + Be^{-x\sqrt{z}/c} \qquad (\lozenge)$$

con A, B constantes. Seguidamente se obtiene, usando el método de los ceficientes indeterminados, una solución paticular de le ecuación completa

$$\varphi(x) = \frac{\cos(\pi x)}{z + c^2\pi^2} - \frac{\alpha\left(e^{-T_l z} - e^{-T_2 z}\right)}{z^2} \qquad (\blacklozenge)$$

con lo que la solución general de $(\mathcal{PT})$ será

$$\mathcal{U}(x,z) = Ae^{x\sqrt{z}/c} + Be^{-x\sqrt{z}/c} + \frac{\cos(\pi x)}{z + c^2\pi^2} - \frac{\alpha\left(e^{-T_l z} - e^{-T_2 z}\right)}{z^2}$$

Para determina el valor de las constantes se usan las condiciones de contorno en el problema original (♠), que proporcionan las siguientes igualdades para cada $z \in \mathbb{C}_+$:

$$0 = \mathcal{L}(u_x(\cdot,0))(z) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(0,z) = \frac{\sqrt{z}}{c}(A - B) \;\Leftrightarrow\; A - B = 0$$

y

$$0 = \mathcal{L}(u_x(\cdot,1))(z) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(1,z) = \frac{\sqrt{z}}{c}\left(Ae^{\sqrt{z}/c} - Be^{-\sqrt{z}/c}\right) \;\Leftrightarrow\; Ae^{\sqrt{z}/c} - Be^{-\sqrt{z}/c} = 0$$

El determinante del sistema lineal será, $-e^{-\sqrt{z}/c} + e^{\sqrt{z}/c} \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{C}_+$, por lo que la solución única será $A = B = 0$. Es decir, la solución del problema transformado será

$$\boxed{\mathcal{U}(x,z) = \frac{\cos(\pi x)}{z + c^2\pi^2} - \frac{\alpha\left(e^{-T_1 z} - e^{-T_2 z}\right)}{z^2}} \qquad (\lozenge\blacklozenge)$$

Para determinar la solución del problema original basta con calcular la transformada inversa de la función anterior, es decir,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\cos(\pi x)}{z + c^2\pi^2} - \frac{\alpha\left(e^{-T_1 z} - e^{-T_2 z}\right)}{z^2}\right)(t) \\ &= \cos(\pi x)\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z + c^2\pi^2}\right)(t) - \alpha\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-T_1 z}}{z^2}\right)(t) + \alpha\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-T_2 z}}{z^2}\right)(t) \\ &= \cos(\pi x)\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z + c^2\pi^2}\right)(t) - \alpha\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^2}\right)_{T_1}(t) + \alpha\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^2}\right)_{T_2}(t) \end{aligned}$$

usando la linealidad de $\mathcal{L}^{-1}$ y la propiedad de traslación. Finalmente, teniendo en cuenta que

- $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{z + c^2\pi^2}\right)(t) = e^{-c^2\pi^2 t}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{z^2}\right)(t) = t$

podemos escribir la solución del problema original cuando $T_2 < +\infty$:

$$\boxed{u(t,x) = \begin{cases} e^{-c^2\pi^2 t}\cos(\pi x), & t < T_1,\ 0 < x < 1 \\ e^{-c^2\pi^2 t}\cos(\pi x) - \alpha\,(t - T_1)\,, & T_1 \leq t < T_2,\ 0 < x < 1 \\ e^{-c^2\pi^2 t}\cos(\pi x) + \alpha\,(T_1 - T_2)\,, & t \geq T_2,\ 0 < x < 1 \end{cases}} \qquad (\text{Sol:}\spadesuit)$$

Si la fuente de calor actúa indefinidamente, $T_2 = +\infty$, es evidente que el problema transformado $(\mathcal{PT})$ será de la forma

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}^*}{\partial x^2}(x,z) = \frac{z}{c^2}\mathcal{U}^*(x,z) + \frac{\alpha e^{-T_1 z}}{c^2 z} - \frac{\cos(\pi x)}{c^2} \qquad (\mathcal{PT}^*)$$

y, siguiendo el mismo procedimiento de resolución, se obtiene que su solución general es de la forma

$$\mathcal{U}^*(x,z) = Ae^{x\sqrt{z}/c} + Be^{-x\sqrt{z}/c} + \frac{\cos(\pi x)}{z + c^2\pi^2} - \frac{\alpha e^{-T_1 z}}{z^2}$$

Finalmente, usando las condiciones de contorno del problema original, se obtiene la solución del problema transformado para $T_2 = +\infty$:

$$\boxed{\mathcal{U}^*(x,z) = \frac{\cos(\pi x)}{z + c^2\pi^2} - \frac{\alpha e^{-T_1 z}}{z^2}} \qquad (\lozenge\blacklozenge^*)$$

de donde, usando la transformada inversa de Laplace, se obtiene la solución del problema (♠) para $T_2 = +\infty$:

$$\boxed{u^*(t,x) = \begin{cases} e^{-c^2\pi^2 t}\cos(\pi x), & t < T_1,\ 0 < x < 1 \\ e^{-c^2\pi^2 t}\cos(\pi x) - \alpha\,(t - T_1)\,, & t \geq T_1,\ 0 < x < 1 \end{cases}} \qquad (\text{Sol:}♠^*)$$

En cuanto al comportamiento asintótico, de (Sol:♠) es evidente que para cada $x \in [0,1]$, se tiene que

$$\lim_{t \to +\infty} u(t,x) = \alpha\,(T_1 - T_2)$$

es decir, la temperatura del sistema tiende a estabilizarse en el valor constante igual a $\alpha\,(T_1 - T_2)$. De hecho, si observamos la solución (Sol:♠), se observa que la evolución de la temperatura en el intervalo temporal $[0, T_1[$ es la misma que en el caso homogéneo ($\alpha = 0$). A partir de ese instante, en el periodo $[T_1, T_2[$ la evolución de la temperatura se ve modificada por el efecto del término fuente, estabilizándose a partir del instante T_2 en que deja de producirse esta aportación y evolucionando hacia la temperatura de equilibrio. En las siguientes gráficas† se muestra la evolución de la temperatura en el caso homogéneo, $\alpha = 0$, donde la solución es $e^{-c^2\pi^2 t}\cos(\pi x)$, tomando $c = 0.3$:

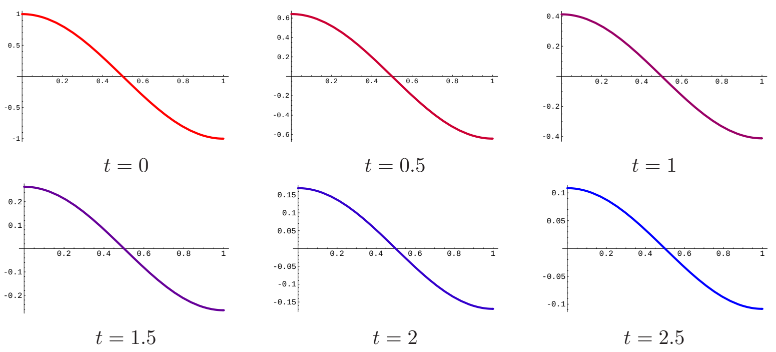


Figura 1: Caso $\alpha = 0$

Se observa que la temperatura tiende a estabilizarse en cero, lo que se aprecia mejor combinando en una misma gráfica los perfiles de temperatura.

†Todas las gráficas que se incluyen han sido realizadas con el programa *Mathematica*© y exportadas en formato PostScript encapsulado (.eps)

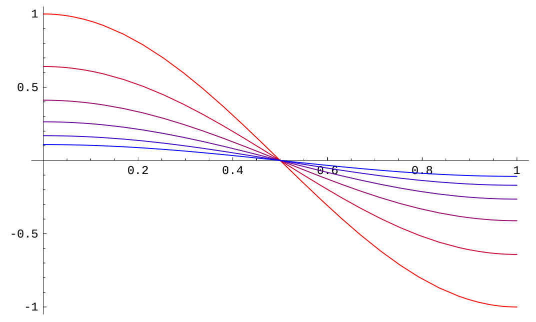


Figura 2: Evolución de la temperatura cuando $\alpha = 0$

A continuación vemos las mismas gráficas para el caso de un término fuente de intensidad $\alpha = 0.2$ que actúa durante un periodo de tiempo finito $T_1 = 1$, $T_2 = 2$:

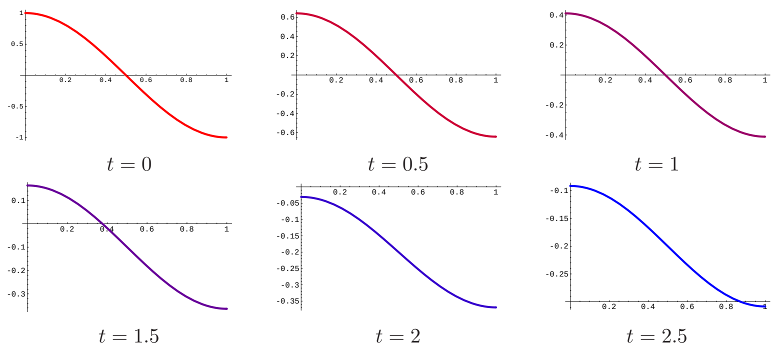


Figura 3: Caso $\alpha = 0.2$, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$

Se observa claramente que las tres primeras gráficas, correspondientes al periodo en que la temperatura evoluciona libremente, son iguales a las de la Figura 1, mientras que en el instante en que empieza a actuar el término fuente, $T_1 = 1$, comienza a cambiar el perfil de la evolución de la temperatura. En este caso, como se ha calculado anteriormente, se observa que una vez deja de actuar el término fuente la temperatura se estabiliza en el valor $\alpha\,(T_1 - T_2) = -0.2$, lo que se aprecia mejor en la siguiente Figura 4 en la que se combinan las gráficas de la figura anterior.

Finalmente, en el caso en que la fuente de calor actúa indefinidamente, $T_2 = +\infty$, de (Sol:♠*) se tiene que

$$\lim_{t \to +\infty} u^*(t,x) = \begin{cases} -\infty, & \alpha > 0 \\ +\infty, & \alpha < 0 \end{cases}$$

para cada $x \in [0,1]$. En particular, cuando pasa mucho tiempo, $t >> 0$, se tiene que $e^{-c^2\pi^2 t} \approx 0$, luego $u^*(t,x) \approx \alpha\,(T_1 - t)$. Es decir, la temperatura se vuelve aproximadamente

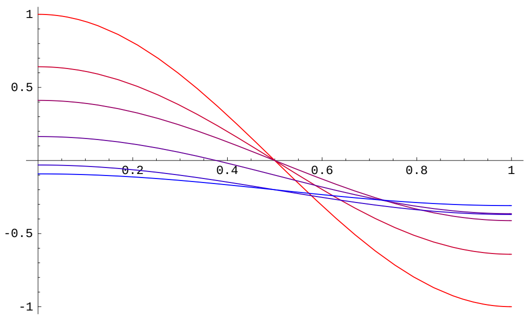
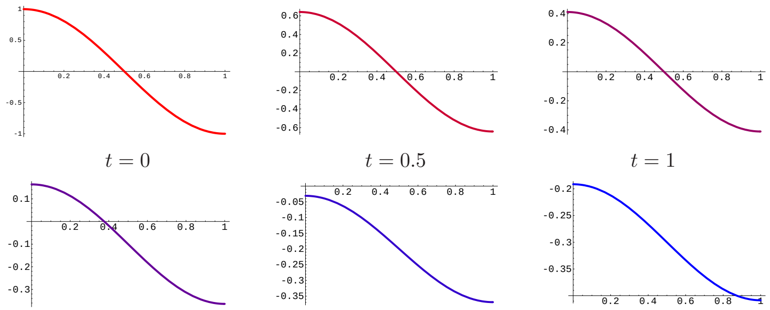


Figura 4: Fuente de calor actuando un periodo finito de tiempo

constante en toda la barra y va tendiendo a infinito con el tiempo, lo que coincide con el resultado que intuitivamente uno espera obtener. En la siguiente figura se muestran los perfiles de temperatura correspondientes a este caso:



$t = 0$ $t = 0.5$ $t = 1$

$t = 1.5$ $t = 2$ $t = 2.5$

Figura 5: Caso $\alpha = 0.2$, $T_1 = 1$, $T_2 = +\infty$

que además aparecen combinados en la Figura 6.

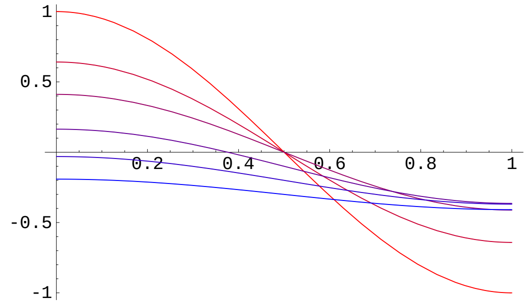
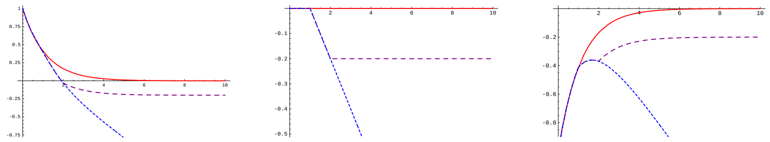


Figura 6: Fuente de calor actuando un periodo infinito de tiempo

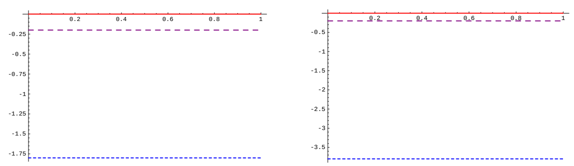
Para terminar se muestran las gráficas de la evolución de la temperatura en el periodo de tiempo $[0, 10]$ en tres puntos significativos de la barra, los extremos y el punto medio. En ellas se observa claramente el distinto comportamiento asintótico de las soluciones en cada uno de los casos, representados en rojo (caso homogéneo, $\alpha = 0$), morado (término fuente $\alpha = 0.2$ actuando un intervalo finito de tiempo, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$) y verde (término fuente actuando indefinidamente, $T_1 = 1$, $T_2 = +\infty$).



$x = 0$ $x = 0.5$ $x = 1$

Figura 7: Evolución de la temperatura en distintos puntos

También la distribución de temperaturas de la barra en los instantes $t = 10$ y $t = 20$ sigiendo el mismo código de colores. Prestar atención a la escala del eje vertical donde se observa que las líneas en rojo y morado están estabilizadas, mientras que la azul se desplaza hacia abajo al aumentar el tiempo.



$t = 10$ $t = 20$

Figura 8: Temperatura de la barra en tiempos grandes