Ingeniero Industrial
"Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales"
Curso 2010/11 / (J.A. Murillo)

Problemas Tema 4 "Espacios de Hilbert"

1. Sea $\mathcal{C}^1([0,1])$ el conjunto de las funciones continuas con derivada continua en el intervalo compacto $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

   (a) Comprueba que la aplicación
   $$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} \left(|f(x)| + |f'(x)|\right), \qquad f \in \mathcal{C}^1([0,1])$$
   define una norma.

   (b) ¿Ocurre lo mismo con la aplicación que a cada $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ le asocia el valor
   $$\sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \; ?$$

   (c) Comprueba que la relación
   $$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx, \qquad f, g \in \mathcal{C}^1([0,1])$$
   define un producto escalar. ¿Cuál será la norma asociada?

2. Sea f_n una sucesión de funciones en $L^2(a,b)$ de forma que $f_n \to f$ respecto de la norma $\|\cdot\|_{L^2}$. Comprueba que, para cada $g \in L^2(a,b)$,
   $$(f_n/g)_{L^2} \to (f/g)_{L^2}$$
   siendo $(\cdot/\cdot)_{L^2}$ el producto escalar en $L^2(a,b)$. (**Ayuda:** Usa la desigualdad de Cauchy-Schwarz).

3. Dado un espacio de Hilbert H, comprueba que si $u, v \in H$ son dos vectores ortogonales, entonces son linealmente independientes.

4. Sean H un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subconjunto. Dado $u \in H$, si existe $\omega \in M$ de forma que $(u-\omega/v-\omega) \le 0$, para todo $v \in M$, comprueba que
   $$\|u-\omega\| \le \|u-v\|, \qquad \forall\, v \in M$$

5. Sobre el espacio $\mathcal{C}([-1,1])$ se considera el producto escalar
   $$(f/g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx, \qquad f, g \in \mathcal{C}([-1,1])$$

   (a) Comprueba que los polinomios $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ y $p_2(x) = 1-3x^2$ son ortogonales respecto de dicho producto escalar.

   (b) Determina el valor de las constantes α, β y γ para que el polinomio
   $$p_3(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + x^3$$
   sea ortogonal a los anteriores.

   (c) Obtén una base del subespacio vectorial generado por los polinomios $\{p_j(x)\}_{0\le j\le 3}$.

6. Sean $D \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ una base ortonormal de $L^2(D)$. Dado un cambio de variable $\Phi : M \longrightarrow D$, (es decir, Φ es biyectiva, de clase $\mathcal{C}^1$ y de forma que su matriz jacobiana J_Φ es no singular o, equivalentemente, su determinante no se anula: $\det J_\Phi(y) \neq 0$, $\forall\, y \in M$), comprueba que las funciones
   $$\psi_n(y) = |\det J_\Phi(y)|^{1/2} \varphi_n(\Phi(y)), \qquad n \ge 1$$
   son una base de $L^2(M)$.

7. Comprueba que las funciones
   $$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\, \operatorname{sen}\left((n-\tfrac{1}{2})(\pi x/\ell)\right), \qquad n \ge 1$$
   forman una familia ortonormal en $L^2(0,\ell)$.

8. Comprueba que la función $g(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ verifica la igualdad:
   $$\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi g(x)\,dx\right)^2 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^\pi \cos(nx)g(x)\,dx\right)^2$$
   (septiembre 2001).

9. Si $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ son dos familias ortonormales de funciones en $L^2(a,b)$ y $L^2(c,d)$ respectivamente, demuestra que las funciones
   $$\phi_{nm}(x,y) = \varphi_n(x)\psi_m(y)$$
   constituyen una familia ortonormal en $L^2(D)$, para $D =]a,b[\times]c,d[\subset \mathbb{R}^2$.

10. Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ una base ortonormal de funciones del espacio $L^2(0,\pi)$. Indica, justificando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    (a) Existe una función continua $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que $f(0) \neq f(\pi)$ y
    $$\int_0^\pi f(x)\phi_n(x)\,dx = 0$$
    para cada $n \ge 1$.

(b) Se verifica la igualdad:

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} \phi_n(x)\, dx \right)^2$$

Ayuda: La función constante igual a uno pertenece a $L^2(0,\pi)$.

(febrero 2002).

(c) Se verifica la igualdad:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x^2)\phi_n(x)\, dx = 0$$

(d) Se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \phi_n(x)\, dx = 0$$

Ayuda: La función constante igual a uno pertenece a $L^2(0,\pi)$.

(septiembre 2002).

11. Los polinomios de Legendre se definen como

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right), \qquad n \geq 0$$

donde $\frac{d^n}{dx^n}$ indica la derivada n-ésima.

(a) Calcula explícitamente los polinomios de Legendre para $0 \leq n \leq 3$.

(b) Si f es una función de clase $\mathcal{C}^n([-1,1])$, comprueba que

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\, dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^n f}{dx^n}(x)(x^2-1)^n\, dx$$

Ayuda: Usa inducción e integración por partes.

(c) Deduce del apartado anterior que la familia de los polinomios de Legendre es ortogonal en $L^2(-1,1)$, es decir, que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\, dx = 0$$

si $n \neq m$.

12. Sobre el espacio $\mathcal{C}([-1,1])$ se define la aplicación:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \qquad f,g \in \mathcal{C}([-1,1])$$

(a) Comprueba que se trata de un producto escalar.

(b) Si para cada $n \geq 0$ se define la función $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, $x \in [-1,1]$, comprueba que la familia de funciones $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ es ortonormal respecto del anterior producto escalar.

13. Sea el espacio

$$L^2_\omega(0,1) = \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : \exists \int_0^1 \omega(\theta)|f(\theta)|^2\, d\theta \right\}$$

formado por las funciones cuyo cuadrado, multiplicado por la *función peso* ω, es integrable. Considerando el caso particular $\omega(\theta) = \theta$ responde a los apartados siguientes:

(a) La familia de funciones $u_n(\theta) = \cos\left(n\pi\theta^2\right)$, $n \geq 1$ es ortogonal.

(b) Calcula la serie de Fourier de la función escalón

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq 1/2 \\ 0, & 1/2 < \theta \leq 1 \end{cases}$$

en el espacio $L^1_\omega(0,1)$ respecto de la familia ortogonal del apartado anterior.

(c) ¿Qué aspecto tendrá la desigualdad de Bessel?

(d) ¿Cuál será el valor del siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \theta \cos\left(n\pi\theta^2\right) \operatorname{sen}(\theta)\, d\theta \ ?$$