Ingeniero Industrial
"Transformadas Integrales y
Ecuaciones en Derivadas Parciales"
Curso 2010/11 (J.A. Murillo)

# Problemas Tema 8 "Sistemas singulares de Sturm-Liouville. Funciones de Bessel"

1. Dado el siguiente problema de contorno:

$$\left.\begin{array}{l} x^2\phi''(x)+x\phi'(x)+\left(x^2-n^2\right)\phi(x)=0 \\ \phi(a)=\phi(b)=0, \quad (0<a<b) \end{array}\right\}$$

Encuentra una condición suficiente para que la única solución del mismo sea la función idénticamente nula.
**Ayuda:** Utiliza las propiedades de las funciones de Bessel.

2. Encuentra la solución de la ecuación del calor

$$u_t=c^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)$$

en el conjunto $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<b^2\right\}$, de forma que se verifiquen las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$\left\{\begin{array}{ll} u(0,x,y)=\left\{\begin{array}{ll} 1, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{array}\right. & \text{en } \Omega \\ & \\ u=0, & \text{sobre } ]0,+\infty[\times\partial\Omega \end{array}\right.$$

**Ayuda:** Ten en cuenta que, si $\{\lambda_{nm}\}_{m=1}^{\infty}$ es el conjunto de los ceros positivos de la función de Bessel $J_n$, entonces las funciones $\phi_{nm}(r)=J_n(\lambda_{nm}r/b)$ son una base ortogonal de $L^2_\omega(0,b)$, siendo $\omega(r)=r$. Además: $\|\phi_{nm}\|^2_{L^2_\omega}=b^2J^2_{n+1}(\lambda_{nm})/2$.

3. Sea la función $f(x)=x^{1/2}J_n(x)$. Comprueba que $f$ es solución de la ecuación diferencial

$$\phi''(x)+\phi(x)=\left(n^2-\tfrac{1}{4}\right)x^{-2}\phi(x)$$

y encuentra la solución general de la misma.

4. Encuentra la solución de la ecuación del calor en $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<\rho^2\right\}$, de forma que se verifiquen las siguientes condiciones iniciales y de contorno, dadas en coordenadas polares:

$$\left\{\begin{array}{ll} u(0,r,\theta)=\left\{\begin{array}{ll} 1, & 0\le r\le\rho/2 \\ 0, & \rho/2<r<\rho \end{array}\right. & \text{en } \Omega \\ & \\ u_r+\beta u=0, \ (\beta>0) & \text{sobre } ]0,+\infty[\times\partial\Omega \end{array}\right.$$

**Ayuda:** Ten en cuenta que si $\{\mu_{nm}\}_{m=1}^{\infty}$ es la sucesión de las soluciones positivas de la ecuación $\rho\beta J_n(x)+xJ_n'(x)=0$, entonces las funciones $\psi_{nm}(r)=J_n(\mu_{nm}r/\rho)$ son una base ortogonal del espacio $L^2_\omega(0,\rho)$, con $\omega(r)=r$, de forma que

$$\|\psi\|^2_{L^2_\omega}=\rho^2\left(\mu^2_{nm}-n^2+\rho^2\beta^2\right)J^2_n(\mu_{nm})/2\mu^2_{nm}.$$

5. Dado el siguiente sistema de Sturm-Liouville singular,

$$\left.\begin{array}{ll} (xu'(x))'-\frac{n^2}{x}u(x)=-\lambda xu(x), & 0\le x\le\ell \\ \alpha u(\ell)+\beta u'(\ell)=0 & \end{array}\right\} \qquad \text{(S-L)}$$

con $\alpha,\beta$ dos números reales que no se anulan simultáneamente ($\alpha^2+\beta^2\neq 0$):

(a) Comprueba que el operador $Lu=(xu')'-\frac{n^2}{x}u$ es *autoadjunto* en el dominio

$$\mathcal{D}=\left\{u\in C^2\left([0,\ell];\mathbb{C}\right) : Lu\in L^2\left(0,\ell;\mathbb{C}\right),\ \alpha u(\ell)+\beta u'(\ell)=0\right\}$$

es decir, verifica que $(Lu/v)_{L^2}=(u/Lv)_{L^2}$, para cada $u,v\in\mathcal{D}$, siendo $(\cdot/\cdot)_{L^2}$ el producto escalar en $L^2(0,\ell;\mathbb{C})$.

(b) Utiliza el apartado anterior para demostrar que todos los autovalores de (S-L) son reales y, si además $\alpha,\beta\ge 0$, entonces son todos positivos.

(c) Comprueba que $\lambda=\mu^2>0$ es un valor propio de (S-L) si y solamente si

$$\ell\alpha J_n(\mu\ell)+\beta\mu\ell J_n'(\mu\ell)=0$$

6. Encuentra la solución de la ecuación del calor en el disco $D$ de centro cero y radio unidad, suponiéndolo aislado, es decir, de forma que se verifica la condición de contorno

$$u_r=0, \quad \text{sobre } [0,+\infty[\times\partial D$$

dadas en coordenadas polares. Supón además que la distribución inicial de la temperatura sobre los puntos de $D$ viene dada por la función

$$u_0(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} \kappa, & \text{si } x^2+y^2\le\delta^2,\ y\ge 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{array}\right.$$

donde $\kappa>0$ y $0<\delta<$ son constantes.

7. Resuelve el problema de difusión de calor en el recinto, dado en coordenadas polares,

$$\Omega=\{(r,\theta) : 0\le r\le\rho,\ 0<\theta<\pi/2\}$$

suponiendo que la temperatura inicial $u_0$ es conocida y que el borde está aislado, esto es, obtén la solución del problema:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,r,\theta)=c^2\left(u_{rr}(t,r,\theta)+\frac{u_r(t,r,\theta)}{r}+\frac{u_{\theta\theta}(t,r,\theta)}{r^2}\right), & t>0,\ 0<r<\eta,\ 0<\theta<\pi/2 \\ u(0,r,\theta)=u_0(r,\theta), & 0<r<\rho,\ 0<\theta<\pi/2 \\ u_\theta(t,r,0)=u_\theta(t,r,\pi/2)=u_r(r,\rho,\theta)=0, & t>0,\ 0<r<\rho,\ 0<\theta<\pi/2 \end{array}\right\}$$

8. Determina la función que proporciona la temperatura de un dominio circular de forma que el calor se transmite únicamente por conducción, se verifica la ley de enfriamiento de Newton en la frontera y se conoce la distribución de temperatura $u_0$ en el instante inicial. En resumen, halla la solución del problema:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x,y)=c^2\left(u_{xx}(t,x,y)+u_{yy}(t,x,y)\right), & t>0,\ (x,y)\in D, \\ u(0,x,y)=u_0(x,y), & (x,y)\in D \\ \nabla u(t,x,y)\cdot \mathbf{n}+\beta u(t,x,y)=0,\ (\beta>0) & t>0,\ (x,y)\in\partial D \end{array}\right\}$$

donde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<\delta^2\right\}$, $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario a la frontera de $D$ dirigido hacia afuera y la función que proporciona la condición inicial es de la forma:

$$u_0(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} \rho^2-x^2-y^2, & x^2+y^2<\rho^2 \\ 0, & \rho^2\le x^2+y^2<\delta^2 \end{array}\right.$$

con $0<\rho<\delta$.

**Solución:** Al ser el recinto circular usamos coordenadas polares para las variables espaciales $x,y$, con lo que el problema queda reformulado de la forma:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,r,\theta)=c^2\left(u_{rr}(t,r,\theta)+\frac{u_r(t,r,\theta)}{r}+\frac{u_{\theta\theta}(t,r,\theta)}{r^2}\right), & t>0,\ 0<r<\delta,\ 0<\theta<2\pi \\ u(0,r,\theta)=u_0(r,\theta), & 0<r<\delta,\ 0<\theta<2\pi \\ u_r(t,\delta,\theta)+\beta u(t,\delta,\theta)=0, & t>0,\ 0<\theta<2\pi \end{array}\right\}$$

teniendo en cuenta que, al ser $\partial D$ una circunferencia, $\mathbf{n}=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$ y, usando la regla de la cadena, $\nabla u\cdot\mathbf{n}=u_r$. Además:

$$u_0(r,\theta)=\left\{\begin{array}{ll} \rho^2-r^2, & r<\rho \\ 0, & \rho\le r<\delta \end{array}\right.$$

Resolvemos ahora este problema por el método de separación de variables, escribiendo:

$$u(t,r,\theta)=T(t)R(r)\Theta(\theta)$$

lo que lleva a escribir la ecuación en derivadas parciales como:

$$\frac{T'(t)}{c^2T(t)}=\frac{R''(r)}{R(r)}+\frac{R'(r)}{rR(r)}+\frac{\Theta''(\theta)}{r^2\Theta(\theta)}=\text{cte}$$

Llamando $-\mu^2$ a la constante obtenemos las ecuaciones:

$$\boxed{T'(t)=-c^2\mu^2T(t)} \qquad (1)$$

y

$$\frac{r^2R''(r)}{R(r)}+\frac{rR'(r)}{R(r)}+\mu^2r^2=\frac{-\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=\text{cte}$$

Si llamamos $\nu$ a esta nueva constante obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales para las funciones $R$ y $\Theta$:

$$\boxed{\Theta''(\theta)=-\nu\Theta(\theta)} \qquad (2)$$

$$\boxed{r^2R''(r)+rR'(r)+\left(\mu^2r^2-\nu\right)R(r)=0} \qquad (3)$$

Debido a la geometría del dominio $D$ en el que estamos resolviendo el problema, la función $\Theta$ y su derivada deben ser $2\pi$-periódicas, es decir,

$$\Theta(\theta)-\Theta(\theta+2\pi)=0,\quad \Theta'(\theta)-\Theta'(\theta+2\pi)=0,\ \ \forall\ \theta$$

Escribiendo el caso particular $\theta=0$ obtenemos condiciones de contorno periódicas, que junto con (2) nos permiten plantear el siguiente sistema de Sturm-Liouville regular

$$\left.\begin{array}{ll} \Theta''(\theta)=-\nu\Theta(\theta), & 0<\theta<2\pi \\ \Theta(0)-\Theta(2\pi)=0 & \\ \Theta'(0)-\Theta'(2\pi)=0 & \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Resolviendo la ecuación (2) y teniendo en cuenta las condiciones de contorno, se obtiene que los autovalores de (4) son de la forma $\nu_n=n^2$, $n\ge 0$. En cuanto a los espacios de autofunciones, se tiene que en el caso $\nu_0=0$ es de dimensión uno y la función

$$\boxed{\Theta_0(\theta)=1} \qquad (5)$$

es una base. Por el contrario, si $n\ge 1$ el subespacio de autofunciones asociado a $\nu_n=n^2$ tiene dimensión dos y las funciones

$$\boxed{\Theta_n(\theta)=\cos(n\theta),\quad \Phi_n(\theta)=\operatorname{sen}(n\theta)} \qquad (6)$$

proporcionan una base ortogonal en $L^2(0,2\pi)$. Por otra parte, de la condición de contorno de tipo Robin que tenemos en el problema, se deduce que

$$T(t)R'(\delta)\Theta(\theta)+\beta T(t)R(\delta)\Theta(\theta)=0,\quad t>0,\ 0<\theta<2\pi$$

de donde se desprende que $R'(\delta)+\beta R(\delta)=0$. Tenemos, pues, el siguiente sistema de Sturm-Liouville asociado a una ecuación de Bessel:

$$\left.\begin{array}{l} r^2R''(r)+rR'(r)+\left(\mu^2r^2-n^2\right)R(r)=0, \\ \exists\ R(0) \\ \beta R(\delta)+R'(\delta)=0 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

para $n \geq 0$. Suponiendo que $R(r) = \phi(\mu r)$, se obtiene de forma inmediata que $\phi$ debe ser solución de la ecuación de Bessel:

$$s^2\phi''(s) + s\phi(s) + \left(s^2 - n^2\right)\phi(s) = 0$$

por lo que existirán constantes $A, B \in \mathbb{R}$ tales que $\phi(s) = AJ_n(s) + BY_n(s)$. Pero $R$, y por tanto $\phi$, debe estar definida en cero, lo que, necesariamente, implica que $B = 0$. Además, la condición de contorno en $\delta$, genera la ecuación:

$$\beta J_n(\mu\delta) + \mu J_n'(\mu\delta) = 0 \;\Leftrightarrow\; \beta\delta J_n(\mu\delta) + \mu\delta J_n'(\mu\delta) = 0$$

De aquí, si consideramos la sucesión $\{\eta_{nm}\}_{m=1}^{\infty}$ de las soluciones positivas de la ecuación

$$\beta\delta J_n(\eta) + \eta J_n'(\eta) = 0$$

se deduce que $\mu\delta = \eta_{nm}$, y las funciones

$$\boxed{R_{nm}(r) = J_n(\eta_{nm} r/\delta)} \tag{8}$$

son soluciones de (7) y además, como consecuencia del teorema espectral para sistemas de Bessel (dado que $\beta\delta > 0$), para cada $n \geq 0$ fijo, las funciones $\{R_{nm}\}_{m=1}^{\infty}$ son una base ortogonal del espacio de Hilbert $L^2_\omega(0,\delta)$, para $\omega(r) = r$, con

$$\|R_{nm}\|^2_{L^2_\omega} = \frac{\delta^2\left(\eta_{nm}^2 - n^2 + \beta^2\delta^2\right)}{2\eta_{nm}^2} J_n^2(\eta_{nm})$$

Finalmente, se resuelve ahora las ecuación (1) con $\mu = \eta_{nm}/\delta$:

$$\boxed{T_{nm}(t) = A_{nm} e^{-c^2\eta_{nm}^2 t/\delta^2}} \tag{9}$$

A partir de las expresiones (5)-(6), (8) y (9) se plantea la solución

$$\boxed{\begin{aligned} u(t,r,\theta) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{-c^2\eta_{nm}^2 t/\delta^2}\left(A_{nm}\cos(n\theta) + A'_{nm}\operatorname{sen}(n\theta)\right) J_n(\eta_{nm} r/\delta) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} A_{0m} e^{-c^2\eta_{0m}^2 t/\delta^2} J_0(\eta_{0m} r/\delta) \end{aligned}}$$

Para determinar el valor de las constantes se exige que se cumpla la condición inicial:

$$\begin{aligned} u_0(r,\theta) = u(0,r,\theta) &= \sum_{n,m=1}^{\infty}\left(A_{nm}\cos(n\theta) + A'_{nm}\operatorname{sen}(n\theta)\right) J_n(\eta_{nm} r/\delta) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} A_{0m} J_0(\eta_{0m} r/\delta) \end{aligned}$$

Sabemos, por otra parte, que las funciones

$$\{\varphi_{nm}(r,\theta) = \cos(n\theta)J_n(\eta_{nm}r/\delta),\; \psi_{nm}(r,\theta) = \operatorname{sen}(n\theta)J_n(\eta_{nm}r/\delta) : n \geq 0,\; m \geq 1\} \tag{10}$$

son una base ortogonal de $L^2_\omega(\Omega)$, con $\Omega = ]0,\delta[\times]0,2\pi[$ y $\omega(r) = r$ (o, equivalentemente, estas funciones escritas en coordenadas cartesianas son una base ortogonal de $L^2(D)$) al ser el sistema trigonométrico una base ortogonal de $L^2(0,2\pi)$ y las funciones $R_{nm}(r) = J_n(\eta_{nm}r/\delta)$ una base ortogonal de $L^2_\omega(0,\delta)$, como ya hemos comentado con anterioridad. Por tanto, los coeficientes de la expresión (10) serán los coeficientes de Fourier de la función $u_0 \in L^2_\omega(\Omega)$ respecto de la anterior base ortogonal, es decir:

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{(u_0/\varphi_{nm})}{\|\varphi_{nm}\|^2_{L^2_\omega}} = \frac{1}{\pi\|R_{nm}\|^2_{L^2_\omega}}\int_0^\delta\int_0^{2\pi} r u_0(r,\theta)\cos(n\theta)J_n(\eta_{nm}r/\delta)\,d\theta\,dr \\ &= \frac{1}{\pi\|R_{nm}\|^2_{L^2_\omega}}\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\,d\theta\right)}_{0}\left(\int_0^\rho r\left(\rho^2 - r^2\right)J_n(\eta_{nm}r/\delta)\,dr\right) = 0 \\ A'_{nm} &= \frac{(u_0/\psi_{nm})}{\|\psi_{nm}\|^2_{L^2_\omega}} = \frac{1}{\pi\|R_{nm}\|^2_{L^2_\omega}}\int_0^\delta\int_0^{2\pi} r u_0(r,\theta)\operatorname{sen}(n\theta)J_n(\eta_{nm}r/\delta)\,d\theta\,dr \\ &= \frac{1}{\pi\|R_{nm}\|^2_{L^2_\omega}}\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(n\theta)\,d\theta\right)}_{0}\left(\int_0^\rho r\left(\rho^2 - r^2\right)J_n(\eta_{nm}r/\delta)\,dr\right) = 0 \\ A_{0m} &= \frac{(u_0/\varphi_{0m})}{\|\varphi_{0m}\|^2_{L^2_\omega}} = \frac{1}{2\pi\|R_{0m}\|^2_{L^2_\omega}}\int_0^\delta\int_0^{2\pi} r u_0(r,\theta)J_0(\eta_{0m}r/\delta)\,d\theta\,dr \\ &= \frac{1}{\|R_{0m}\|^2_{L^2_\omega}}\int_0^\rho r\left(\rho^2 - r^2\right)J_0(\eta_{0m}r/\delta)\,dr \end{aligned}$$

Para calcular la última integral tomamos el cambio de variable $s = \eta_{0m}r/\delta$ y aplicamos integración por partes, teniendo en cuenta que $(s^nJ_n(s))' = s^nJ_{n-1}(s)$:

$$\begin{aligned} \int_0^\rho r\left(\rho^2 - r^2\right)J_0(\eta_{0m}r/\delta)\,dr &= \frac{\delta^2}{\eta_{0m}^2}\int_0^{\eta_{0m}\rho/\eta}\underbrace{\left(\rho^2 - \frac{\delta^2}{\rho_{0m}^2}s^2\right)}_{p}\overbrace{sJ_0(s)}^{q'}\,ds \\ &= \frac{2\delta^4}{\eta_{0m}^4}\int_0^{\eta_{0m}\rho/\delta} s^2J_1(s)\,ds = \frac{2\delta^2\rho^2}{\eta_{0m}^2}J_2(\eta_{0m}\rho/\delta) \end{aligned}$$

Finalmente, usamos la fórmula que proporciona la norma de $R_{0m}$ para obtener la expresión de las constantes:

$$\left.\begin{array}{c} \boxed{A_{nm} = A'_{nm} = 0, \quad (n,m \geq 1)} \\ \boxed{A_{0m} = \dfrac{4\rho^2J_2(\eta_{0m}\rho/\delta)}{\left(\eta_{0m}^2 + \beta^2\delta^2\right)J_0^2(\eta_{0m})} \quad (m \geq 1)} \end{array}\right\}$$

lo que nos proporciona la solución del problema en forma polar:

$$\boxed{u(t,r,\theta) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\rho^2J_2(\eta_{0m}\rho/\delta)}{\left(\eta_{0m}^2 + \beta^2\delta^2\right)J_0^2(\eta_{0m})}e^{-c^2\eta_{0m}^2t/\delta^2}J_0(\eta_{0m}r/\delta)}$$

que fácilmente se reescribe en coordenadas cartesianas:

$$\boxed{u(t,x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\rho^2 J_2(\eta_{0m}\rho/\delta)}{\left(\eta_{0m}^2+\beta^2\delta^2\right)J_0^2(\eta_{0m})}\,e^{-c^2\eta_{0m}^2 t/\delta^2}J_0\left(\eta_{0m}\sqrt{x^2+y^2}/\delta\right)}$$

9. La función $u(t,x)$ que describe la oscilación transversal de una membrana circular de radio uno fija en el borde que se deja evolucionar libremente a partir de una posición y una velocidad iniciales verifica el siguiente problema de contorno:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x)=c^2\Delta u(x,y), & t>0,\ (x,y)\in D \\ u(t,x,y)=0, & t>0,\ (x,y)\in\partial D \end{array}\right\}$$

con $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\right\}$. Obtén, utilizando el método de separación de variables, la solución del problema anterior para las condiciones iniciales:

$$\text{(a)}\ \left\{\begin{array}{l} u(0,x,y)=1-\sqrt{x^2-y^2} \\ u_t(0,x,y)=0 \end{array}\right., \qquad \text{(b)}\ \left\{\begin{array}{l} u(0,x,y)=0 \\ u_t(0,x,y)=x \end{array}\right., \qquad (x,y)\in D$$

10. En el caso de oscilaciones forzadas se tiene que $u(t,x)$ verifica una ecuación de ondas con un término fuente. Utiliza el método de separación de variables para obtener la expresión de las oscilaciones forzadas de una membrana elástica fija en los extremos que inicialmente se encuentra en reposo

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x,y)=c^2\Delta u(t,x,y)+f(t,x,y), & 0<t,\ (x,y)\in D \\ u(t,x,y)=0, & 0<t,\ (x,y)\in\partial D \\ u(0,x,y)=u_t(0,x,y)=0, & (x,y)\in D \end{array}\right\}$$

con $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\right\}$ y $f:[0,+\infty[\times D\longrightarrow\mathbb{R}$ una función arbitraria.

**Solución:** En primer lugar, al igual que en el problema 8, se reformula el problema considerando coordenadas polares en las variables espaciales, obteniendo

$$\left.\begin{array}{l} u_{tt}(t,r,\theta)=c^2\left(u_{rr}(t,r,\theta)+\frac{u_r(t,r,\theta)}{r}+\frac{u_{\theta\theta}(t,r,\theta)}{r^2}\right)+f(t,r,\theta), \\ u(t,1,\theta)=0, \\ u(0,r,\theta)=u_t(0,r,\theta)=0, \end{array}\right\} \qquad (11)$$

con $t>0$, $0<r<1$ y $0<\theta<2\pi$. Seguidamente se separan las variables en la ecuación homogénea asociada a (11), $u(t,r,\theta)=T(t)R(r)\Theta(\theta)$, y siguiendo un proceso similar al del problema 8 se llega al sistema regular de Sturm-Liouville (4), cuyos autovalores son $\nu_n=n^2$, $n\geq 0$, siendo las bases de autofunciones asociadas $\Theta_0(\theta)=1$ y $\Theta_n(\theta)=\cos(n\theta)$, $\Phi_n(\theta)=\operatorname{sen}(n\theta)$. Por otra parte, la función $R(r)$ asociada a la variable radial debe ser solución del siguiente sistema de Sturm-Liouville de tipo Bessel:

$$\left.\begin{array}{l} r^2R''(r)+rR'(r)+\left(\mu^2r^2-n^2\right)R(r)=0, \\ \exists\ R(0), \qquad R(1)=0 \end{array}\right\} \qquad (12)$$

para cada $n\geq 0$. Siguiendo con el procedimiento usado en la resolución del problema 8, se obtiene además que $\mu=\lambda_{nm}$, siendo $\{\lambda_{nm}\}_{m=1}^{\infty}$ la sucesión de los ceros positivos de la función de Bessel $J_n(s)$ y $R_{nm}(r)=J_n(\lambda_{nm}r)$. Con estos elementos se plantea la solución del problema original (11) como una función de la forma

$$\boxed{u(t,r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}T_{nm}(t)\cos(n\theta)J_n(\lambda_{nm}r)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}S_{nm}(t)\operatorname{sen}(n\theta)J_n(\lambda_{nm}r)} \qquad (13)$$

con $T_{nm}(t)$, $S_{nm}(t)$ funciones desconocidas que debemos determinar. Para ello exigimos que $u$ sea solución de la ecuación de ondas completa en (11), es decir,

$$\begin{aligned} f(t,r,\theta) &= u_{tt}(t,r,\theta)-c^2\left(u_{rr}(t,r,\theta)+\frac{u_r(t,r,\theta)}{r}+\frac{u_{\theta\theta}(t,r,\theta)}{r^2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}T''_{nm}(t)\cos(n\theta)J_n(\lambda_{nm}r)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}S''_{nm}(t)\operatorname{sen}(n\theta)J_n(\lambda_{nm}r) \\ &- c^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{nm}^2\left(T_{nm}(t)\cos(n\theta)+S_{nm}(t)\operatorname{sen}(n\theta)\right)J''_n(\lambda_{nm}r)\right) \\ &- c^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_{nm}}{r}\left(T_{nm}(t)\cos(n\theta)+S_{nm}(t)\operatorname{sen}(n\theta)\right)J'_n(\lambda_{nm}r)\right) \\ &+ c^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^2}{r^2}\left(T_{nm}(t)\cos(n\theta)+S_{nm}(t)\operatorname{sen}(n\theta)\right)J_n(\lambda_{nm}r)\right) \end{aligned} \qquad (14)$$

Por otra parte, por definición de las funciones de Bessel, se verifican las relaciones

$$\lambda_{nm}^2r^2J''_n(\lambda_{nm}r)+\lambda_{nm}rJ'_n(\lambda_{nm}r)+\left(\lambda_{nm}^2r^2-n^2\right)J_n(\lambda_{nm}r)=0 \qquad (15)$$

y combinando (14) con (15) podemos escribir

$$\begin{aligned} f(t,r,\theta) &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(T''_{0m}(t)+c^2\lambda_{0m}^2T_{0m}(t)\right)J_{0m}(\lambda_{0m}r) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(T''_{nm}(t)+c^2\lambda_{nm}^2T_{nm}(t)\right)\cos(n\theta)J_n(\lambda_{nm}r) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(S''_{nm}(t)+c^2\lambda_{nm}^2S_{nm}(t)\right)\operatorname{sen}(n\theta)J_n(\lambda_{nm}r) \end{aligned} \qquad (16)$$

Pero, como ya usamos en el ejercicio 8, la familia de funciones (10) forma una base ortogonal de $L^2_\omega(\Omega)$, con $\Omega=]0,1[\times]0,2\pi[$ y $\omega(r)=r$, por lo que si definimos

$$f_{nm}(t) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,f(t,r,\theta)\cos(n\theta)J_n(\lambda_{nm}r)\,dr\,d\theta \qquad (n\geq 0,\ m\geq 1) \qquad (17)$$

$$g_{nm}(t) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,f(t,r,\theta)\operatorname{sen}(n\theta)J_n(\lambda_{nm}r)\,dr\,d\theta \qquad (n,m\geq 1) \qquad (18)$$

combinando (16) con (17)-(18) obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales para las funciones indeterminadas en la expresión general (13):

$$T''_{nm}(t) + c^2\lambda_{nm}^2 T_{nm}(t) = f_{nm}(t), \qquad (n \geq 0,\ m \geq 1) \tag{19}$$

$$S''_{nm}(t) + c^2\lambda_{nm}^2 S_{nm}(t) = g_{nm}(t), \qquad (n, m \geq 1) \tag{20}$$

Teniendo en cuenta que las ecuaciones anteriores son lineales de orden dos con coeficientes constantes y usando el método de variación de parámetros para calcular soluciones particulares de las ecuaciones completas, se tiene que las soluciones generales de (19) y (20) son, respectivamente,

$$T_{nm}(t) = A_{nm}\cos(c\lambda_{nm}t) + B_{nm}\,\mathrm{sen}\,(c\lambda_{nm}t) + \frac{1}{c\lambda_{nm}}\int_0^t \mathrm{sen}\,(c\lambda_{nm}(t-\tau))\, f_{nm}(\tau)d\tau \tag{21}$$

$$S_{nm}(t) = A'_{nm}\cos(c\lambda_{nm}t) + B'_{nm}\,\mathrm{sen}\,(c\lambda_{nm}t) + \frac{1}{c\lambda_{nm}}\int_0^t \mathrm{sen}\,(c\lambda_{nm}(t-\tau))\, g_{nm}(\tau)d\tau \tag{22}$$

Finalmente, para determinar el valor de las constantes, exigimos que se verifiquen las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
0 &= u(0,r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}(0)\cos(n\theta)J_n(\lambda_{nm}r) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_{nm}(0)\,\mathrm{sen}(n\theta)J_n(\lambda_{nm}r) \\
0 &= u_t(0,r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} T'_{nm}(0)\cos(n\theta)J_n(\lambda_{nm}r) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S'_{nm}(0)\,\mathrm{sen}(n\theta)J_n(\lambda_{nm}r)
\end{aligned}$$

de donde $T_{nm}(0) = S_{nm}(0) = T'_{nm}(0) = S'_{nm}(0) = 0$, y sustituyendo en (21)-(22),

$$\boxed{A_{nm} = A'_{nm} = B_{nm} = B'_{nm} = 0, \qquad (n \geq 0,\ m \geq 1)}$$

Así pues, la solución de (11) (o solución del problema en forma polar) será

$$\boxed{\begin{aligned}
u(t,r,\theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_{0m}r)}{c\lambda_{0m}} \int_0^t \mathrm{sen}\,(c\lambda_{0m}(t-\tau))\, f_{0m}(\tau)\,d\tau \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nm}r)\cos(n\theta)}{c\lambda_{nm}} \int_0^t \mathrm{sen}\,(c\lambda_{nm}(t-\tau))\, f_{nm}(\tau)\,d\tau \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nm}r)\,\mathrm{sen}(n\theta)}{c\lambda_{nm}} \int_0^t \mathrm{sen}\,(c\lambda_{nm}(t-\tau))\, g_{nm}(\tau)\,d\tau
\end{aligned}}$$

11. Determina las oscilaciones transversales de una membrana circular elástica inicialmente en reposo cuya frontera se hace oscilar periódicamente resolviendo el siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{ll}
u_{tt}(t,x,y) = c^2\Delta u(t,x,y), & t > 0,\ (x,y) \in D \\
u(t,x,y) = \alpha\,\mathrm{sen}(t), & t > 0,\ (x,y) \in \partial D \\
u(0,x,y) = u_t(0,x,y) = 0, & (x,y) \in D
\end{array}\right\}$$

con $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$, $c, \alpha > 0$ constantes.

**Sugerencia:** Dada la función auxiliar

$$v(t,x,y) = u(t,x,y) - \left(1 - x^2 - y^2\right)\alpha\,\mathrm{sen}(t)$$

determina el problema del cual es solución y sigue el procedimiento del problema anterior para obtener su valor.

12. Resuelve la ecuación de Laplace

$$\Delta u(x,y,z) = 0, \quad (x,y,z) \in \Omega$$

en el cilindro $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ -1 < z < 1\right\}$ para las condiciones de contorno:

$$\left.\begin{array}{ll}
u(x,y,z) = 0, & \text{si } x^2 + y^2 = 1,\ -1 < z < 1 \\
u(x,y,1) = u(x,y,-1) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{si } x^2 + y^2 < 1
\end{array}\right\}$$

**Sugerencia:** Reescribe el problema en coordenadas cilíndricas y usa el método de separación de variables.

13. Resuelve la ecuación de Poisson

$$\Delta u(x,y,z) = xy, \quad (x,y,z) \in \Omega$$

en el cilindro $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ -1 < z < 1\right\}$ para las condiciones de contorno:

$$\left.\begin{array}{ll}
u(x,y,z) = 0, & \text{si } x^2 + y^2 = 1,\ -1 < z < 1 \\
u(x,y,1) = u(x,y,-1) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{si } x^2 + y^2 < 1
\end{array}\right\}$$

**Sugerencia:** Reescribe el problema en coordenadas cilíndricas y sigue el procedimiento del problema 10.