

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN

Laboratorio de Comunicaciones Espaciales

(Manual de Prácticas)

Práctica 2:
Mecánica Orbital
Curso 2010-2011

AUTORES:

Fernando Quesada Pereira
Alejandro Álvarez Melcón

1. Introducción

En esta primera práctica de la asignatura de *Comunicaciones Espaciales* se estudian las leyes que rigen la mecánica orbital. Es gracias al conocimiento de estas leyes que es posible situar a un satélite de comunicaciones en órbita alrededor de la Tierra.

En primer lugar, se repasan los conceptos básicos de mecánica orbital como son las leyes de Kepler(1571-1630) y su demostración mediante la aplicación de las leyes de Newton(1642-1727).

Seguidamente, se plantea la ecuación diferencial que describe la trayectoria de una órbita. En la práctica se trabajará con la solución de dicha ecuación diferencial en el plano que contiene la órbita del satélite y se representaran los tipos de órbitas cercanas a la Tierra más comunes.

Una vez que se tiene caracterizada la órbita de un satélite en el plano que la contiene, resulta conveniente representar el movimiento del satélite artificial respecto a un sistema de referencia centrado en la Tierra. En esta práctica se empleará el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial, donde el eje x_i apunta a una dirección fija en el espacio llamada punto de Aries, el cual resulta más apropiado para describir la trayectoria de un satélite en el espacio. Por el contrario, si lo que se pretende es localizar un satélite respecto a una estación terrena es más adecuado utilizar un sistema de referencia que gire con la propia Tierra. Para la descripción de la órbita en el espacio tridimensional hacen falta otros datos como la inclinación i , el argumento del perigeo ω y la ascensión recta del nodo ascendente ω .

Un aspecto importante a tener en cuenta a la hora de estudiar las órbitas de satélites son las perturbaciones que están sufriendo debido a determinados factores como la irregularidad del campo gravitatorio terrestre, la presión de la radiación solar, la atracción del Sol y la Luna, la fricción con las capas altas de la atmósfera, etc... Estas perturbaciones complican el sencillo modelo dado por las leyes de Kepler y han de tenerse en consideración a la hora de diseñar las órbitas de los satélites de comunicación o realizar las correcciones orbitales necesarias. En la práctica, estudiaremos la regresión nodal $\Delta\Omega$ y apsidal $\Delta\omega$ producidas por la irregularidad del potencial gravitatorio Terrestre.

Las leyes de Kepler parten de la hipótesis de un cuerpo de masa pequeña que gira respecto a otro de masa mucho mayor. Si éste es el caso, el objeto pequeño orbita siguiendo una trayectoria elíptica respecto al de gran tamaño, encontrándose éste en uno de los focos de la elipse. Si la masa de los cuerpos es similar, ambos giran respecto a un centro de masas común, con lo cual el modelo de Kepler se complica. El matemático, físico y astrónomo *Joseph-Louis Lagrange* (1736-1813), estudió en 1772 el problema astronómico de tres cuerpos. Para este problema, considerando uno de los cuerpos de masa mucho menor que los otros dos, descubrió la existencia de 5 puntos de equilibrio en los cuales el objeto menor se encuentra en una posición fija respecto a los dos mayores.

En la última parte de la práctica se estudiará el balance de fuerzas de los sistemas Tierra-Luna y Tierra-Sol, que permite localizar los puntos de Lagrange.



Figura 1: Astrónomos danes Tycho Brahe(1546-1601) y aleman Johannes Kepler(1571-1630).
Personajes pioneros de las astronomía moderna

2. Mecánica orbital

Basándose en los datos experimentales recopilados por el astrónomo *Tycho Brahe*(1546-1601), *Johannes Kepler* propuso tres leyes que describen el movimiento de los planetas en su órbita alrededor del Sol. Las **tres leyes** enunciadas por **Kepler** se resumen en:

1. La órbita de un cuerpo pequeño en relación a otro de mayor tamaño es siempre una elipse, encontrándose situado el centro de masas del cuerpo grande en uno de los focos de la elipse (ver la Fig. 2(a)).
2. La órbita del cuerpo pequeño barre áreas iguales en tiempos iguales (ver la Fig. 2(b)).
3. El cuadrado del periodo de revolución del cuerpo del cuerpo pequeño respecto al grande es proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica (ver la Fig. 3). Es decir, $T^2 = (4\pi^2 a^3)/\mu$, donde T es el periodo orbital, a la longitud del semieje mayor de la elipse, y $\mu = 3,986004418 \cdot 10^5 (km^3/s^2)$ la constante de Kepler.

Tal y como se ha comentado anteriormente, las leyes de Kepler se establecieron de forma empírica. No fue hasta que Newton (1642-1727) enunció sus famosas tres leyes y la ley de la gravitación universal, que se pudieron demostrar los postulados de Kepler.

2.1. Ecuación diferencial de la trayectoria de una órbita

Para que un satélite se encuentre situado en una órbita estable alrededor de la Tierra, debe producirse un equilibrio entre las distintas fuerzas que se aplican a éste. En un modelo simplificado,

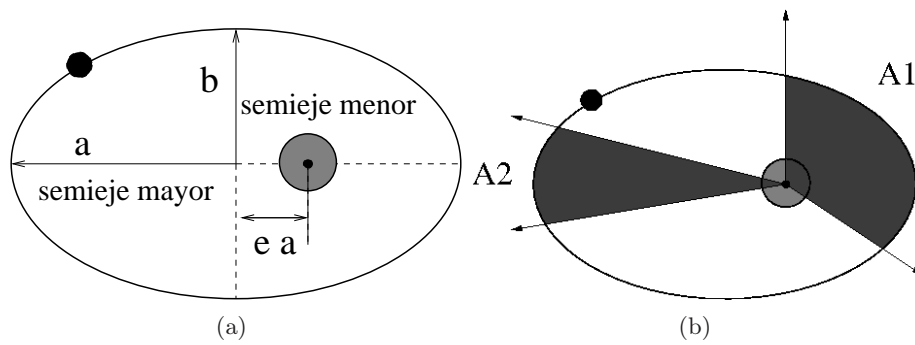


Figura 2: Representación gráfica de la primera y segunda leyes de Kepler

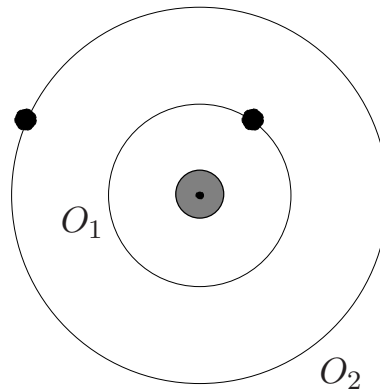


Figura 3: Según la tercera ley de Kepler el cuerpo situado en la órbita O_1 presenta un periodo T más corto que el situado en la O_2 .

sólo se tienen en cuenta la fuerza centrípeta F_{IN} , debida a la ley de la gravitación universal, y la fuerza centrífuga F_{OUT} que depende de la cantidad de movimiento del satélite (ver la Fig. 4). Por otra parte, en un satélite en órbita estable siempre se mantiene la suma de su energía potencial y su energía cinética.

Siguiendo un sistema de referencia centrado en la Tierra (ver la Fig. 5), con el eje x apuntando al primer punto de Aries, y teniendo en cuenta las leyes de la mecánica newtoniana se puede establecer la relación de fuerzas que se recoge seguidamente.

La ley de la gravitación universal establece que la fuerza de atracción entre dos cuerpos sigue la relación,

$$\vec{F} = -\frac{GM_E m \vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

donde $G = 6,672 \cdot 10^{-20} (Km^3/(kgs^2))$ es la constante de gravitación universal, $M_E = 5,97 \cdot 10^{24} Kg$ la masa de la Tierra y m la masa del satélite.

Asimismo, la segunda ley de Newton nos dice que la suma de fuerzas aplicadas sobre un cuerpo es igual a la masa de dicho cuerpo multiplicada por la aceleración.

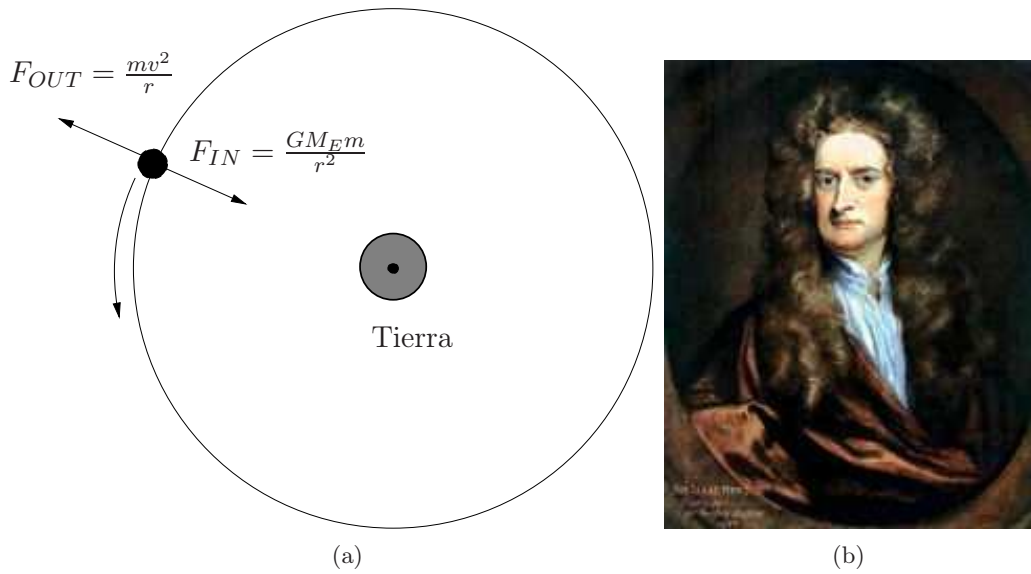


Figura 4: Equilibrio de fuerzas en un satélite según la mecánica newtoniana

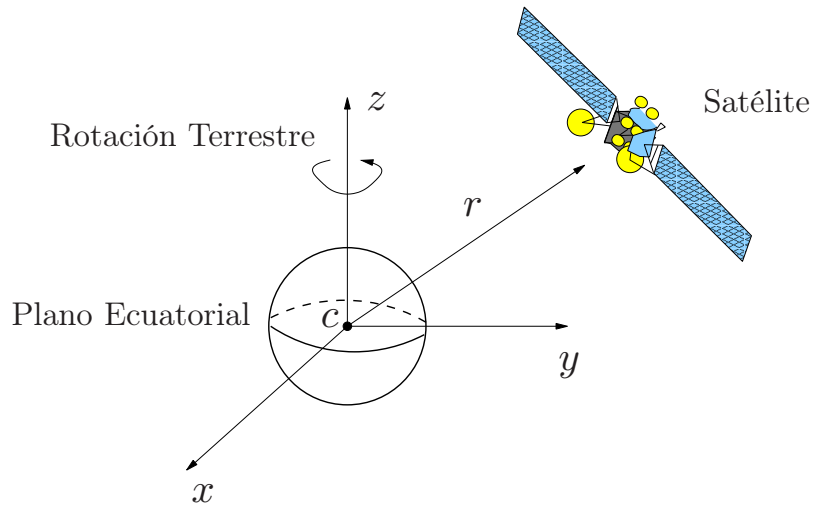


Figura 5: Sistema de referencia centrado en la Tierra, con eje x según el primer punto de Aries

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \tag{2}$$

Si se igualan ambas relaciones (1) y (2) se llega a:

$$-\frac{\vec{r}}{r^3} \mu = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \tag{3a}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\vec{r}}{r^3} \mu = 0 \tag{3b}$$

La anterior ecuación diferencial (3) es vectorial y de segundo orden. Debido a que se encuentran presentes las derivadas segundas de las tres componentes espaciales (x, y, z) , son necesarios *seis pa-*

rámetros orbitales para poder describir de forma unívoca la trayectoria de un satélite respecto a la Tierra.

La solución de la ecuación diferencial (3) es difícil de encontrar de forma general, por lo que se suele simplificar la situación resolviendo el problema en el plano que contiene a la órbita del satélite (ver la Fig. 6).

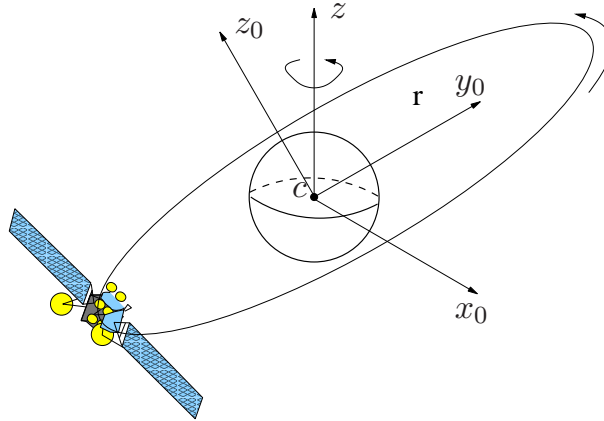


Figura 6: Sistema de referencia centrado en el plano orbital

Si se escribe la ecuación diferencial (3), según el nuevo sistema de referencia representado en Fig. 6, ésta queda de la siguiente forma:

$$\hat{x}_0 \left(\frac{d^2 x_0}{dt^2} \right) + \hat{y}_0 \left(\frac{d^2 y_0}{dt^2} \right) + \frac{\mu(x_0 \hat{x}_0 + y_0 \hat{y}_0)}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}} = 0 \quad (4)$$

Si se realiza un cambio a coordenadas polares (5), la ecuación diferencial se simplifica aún más.

$$x_0 = r_0 \cos \phi_0 \quad (5a)$$

$$y_0 = r_0 \sin \phi_0 \quad (5b)$$

$$\hat{x}_0 = \hat{r}_0 \cos \phi_0 - \hat{\phi}_0 \sin \phi_0 \quad (5c)$$

$$\hat{y}_0 = \hat{\phi}_0 \cos \phi_0 + \hat{r}_0 \sin \phi_0 \quad (5d)$$

Una vez realizado el cambio de coordenadas, se tienen dos ecuaciones diferenciales para cada una de las coordenadas vectoriales.

$$\frac{d^2 r_0}{dt^2} - r_0 \left(\frac{d\phi_0}{dt} \right)^2 = -\frac{\mu}{r_0^2} \quad (6a)$$

$$r_0 \left(\frac{d^2 \phi_0}{dt^2} \right) + 2 \left(\frac{dr_0}{dt} \right) \left(\frac{d\phi_0}{dt} \right) = 0 \quad (6b)$$

Empleando procedimientos matemáticos clásicos se puede encontrar una solución del anterior sistema de ecuaciones diferenciales (6) para el radio de la órbita del satélite r_0 , de la forma siguiente,

$$r_0 = \frac{p}{1 + e \cos(\phi_0 - \theta_0)} \quad (7)$$

donde $p = (h^2)/\mu$ es el *semilatus rectum* de la elipse. Por otra parte, h es el módulo del momento angular del satélite. Se cumple también que $p = a(1 - e^2)$, siendo a el semieje mayor de la elipse y e su excentricidad. De este modo, la relación (7) se puede escribir alternativamente como:

$$r_0 = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\phi_0 - \theta_0)} \quad (8)$$

Asimismo, el ángulo θ_0 sirve para orientar la elipse respecto a los ejes del plano orbital x_0 e y_0 , por lo que reorientando éstos se puede hacer que $\theta_0 = 0$. Por lo tanto, como expresión final de la ecuación de la órbita elíptica utilizaremos:

$$r_0 = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi_0} \quad (9)$$

Ejercicio 1. (*Optativo*) Demuestre que la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (6) se puede escribir como (7). Nota: *Se trata de un ejercicio optativo que el alumno deberá realizar por su cuenta fuera del horario de laboratorio.*

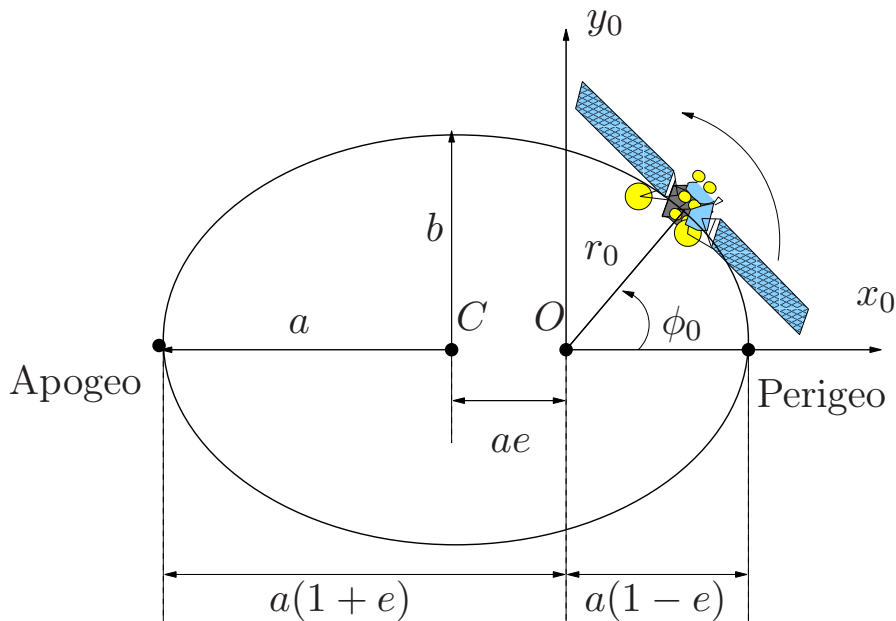


Figura 7: Representación de un satélite en el plano de su órbita

2.2. Representación de la órbita de un satélite

En este apartado veremos como calcular la órbita de un satélite en su plano, en función de una serie de parámetros que la describen. Para ello partiremos de la ecuación (9). En esta ecuación el término ϕ_0 se denomina anomalía verdadera (en algunos libros aparece representada como v) y es el

ángulo que forma el vector de posición del satélite desde el foco de la elipse con el eje x_0 de ésta, tal y como se representa en la Fig. 7.

Las coordenadas cartesianas del satélite se calculan deshaciendo la transformación a coordenadas polares de la forma:

$$x_0 = r_0 \cos \phi_0 \quad (10a)$$

$$y_0 = r_0 \sin \phi_0 \quad (10b)$$

Un parámetro importante a la hora de caracterizar la órbita de un satélite es la velocidad angular media de éste, representada como η . En un periodo de T , el satélite recorre una distancia angular igual a 2π , por lo que su velocidad angular media se puede calcular como:

$$\eta = (2\pi)/T = (\mu^{1/2})/(a^{3/2}) \quad (11)$$

donde se ha tenido en cuenta la tercera ley de Kepler.

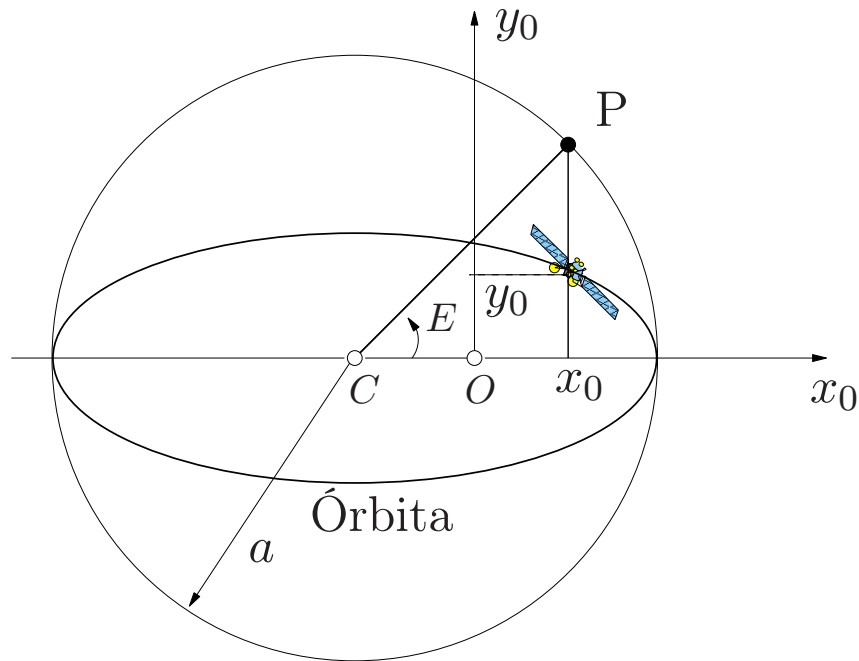


Figura 8: Órbita de un satélite y circunferencia circunscrita

En una órbita genérica elíptica la velocidad angular cambia dependiendo de la posición. Sin embargo, en una órbita circular esto no sucede, y el satélite se mueve con una velocidad angular constante η . Un cuerpo que describa la trayectoria de la circunferencia circunscrita a la órbita elíptica del satélite, representada en la Fig. 8, con una velocidad angular constante de valor η , efectuará una vuelta en el mismo tiempo T que dicho satélite sobre su propia trayectoria.

Atendiendo a la Fig. 8, se define como anomalía excentrica E al ángulo que forma el eje x_0 con la línea que une el centro de la circunferencia con el punto P . El punto P se obtiene prolongando una

línea paralela al eje y_0 , que pasa por la localización del satélite, hasta que corta a la circunferencia circunscrita.

El radio del satélite r_0 se encuentra relacionado con la anomalía excentrica E mediante la relación:

$$r_0 = a(1 - e \cos E) \quad (12a)$$

$$a - r_0 = ae \cos E \quad (12b)$$

Por otra parte se puede establecer una relación entre la anomalía excéntrica y la velocidad angular media de la forma:

$$\eta dt = (1 - e \cos E) dE \quad (13)$$

Integrando la ecuación (13) se llega a:

$$\eta(t - t_p) = (E - e \sin E) \quad (14)$$

donde t_p es el denominado tiempo del perigeo, que es el correspondiente a la aproximación mayor a la Tierra por parte del satélite.

Asimismo, se define la *anomalía media* M como:

$$M = \eta(t - t_p) = E - e \sin E \quad (15)$$

Esta anomalía media es la longitud del arco en radianes que el satélite habría recorrido desde el paso por el perigeo si se moviese por la circunferencia circunscrita con una velocidad angular media η .

Conociendo los parámetros descritos anteriormente se puede determinar la posición de un satélite, siguiendo los siguientes pasos:

1. Se calcula $\eta = (2\pi)/T = \mu^{1/2}/(a^{3/2})$.
2. Se calcula $M = \eta(t - t_p) = E - e \sin E$.
3. Se encuentra E despejando de la ecuación anterior (de forma numérica).
4. Se calcula r_0 , empleando E , de la relación $a - r_0 = ae \cos E$.
5. De la ecuación $r_0 = a(1 - e^2)/(1 + e \cos \phi_0)$ se encuentra ϕ_0 .
6. Se calcula $x_0 = r_0 \cos \phi_0$ e $y_0 = r_0 \sin \phi_0$.

Una vez localizado el satélite en su plano orbital, se debe encontrar la posición del satélite respecto a la Tierra, tal y como veremos posteriormente.

Ejercicio 2. Considere un satélite de tipo Molniya, el cual describe una trayectoria altamente excéntrica (HEO) con $e = 0,75$. Dicho satélite es de tipo geosíncrono, ya que su periodo de rotación es igual a

$T = \text{Dia}_{\text{Sideral}}/2$ (un día sideral tiene una duración de 23 h, 56 min y 4,1 s). Teniendo en cuenta los datos anteriores, calcule la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica a , la velocidad angular media η , la altura del perigeo h_p y del apogeo h_a . Tenga en cuenta que el radio medio de la Tierra es $R_E = 6378,144$ Km.

Ejercicio 3. Empleando la ecuación (9) y los parámetros necesarios que haya encontrado en el ejercicio anterior, represente empleando Matlab la trayectoria del satélite con órbita de tipo Molniya (utilice el comando *axis equal* de Matlab para que no se pierda la relación de aspecto) y tenga en cuenta que la anomalía verdadera varía entre $0 \leq \phi_0 < 2\pi$. Dibuje dentro de la misma gráfica la Tierra (marcando su centro) y la circunferencia circunscrita a la órbita elíptica.

Ejercicio 4. Una vez que se ha representado la trayectoria del satélite, el siguiente paso es estudiar el movimiento de éste a lo largo de la órbita. Para ello debe de seguir las instrucciones relatadas anteriormente. Calcule la anomalía media M con una variación temporal t de un día sideral en incrementos de 15 min, considerando que el tiempo del perigeo es $t_p = 0$. Para calcular la anomalía excentrica E , para cada valor de M , debe resolver una ecuación que no tiene solución analítica, por lo que se ha de recurrir a técnicas numéricas. El software Matlab contiene una función específica para encontrar los ceros de funciones llamada *fzero* (en caso de versiones antiguas de Matlab se puede emplear la técnica de Newton-Rhapson). Utilice dicha rutina para encontrar los valores de la anomalía excentrica correspondiente. Para encontrar el valor de la anomalía verdadera ϕ_0 puede despejar directamente de la ecuación (9), aunque es posible que tenga ambigüedades de ángulo. Por ello, resulta más conveniente que use la relación:

$$\tan(E/2) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan(\phi_0/2) \quad (16)$$

Después de realizar los pasos anteriores y encontrados los valores de x_0 e y_0 correspondientes a cada instante temporal, represente el movimiento del satélite en su órbita. Para que el efecto visual sea el adecuado debe redibujar todas las gráficas para cada Δt . Asimismo, represente simultáneamente el movimiento de un satélite que siga la trayectoria de la circunferencia circunscrita con la misma velocidad angular media η . *Nota: Es conveniente que utilice el comando `pause` de Matlab para realentizar un tanto la simulación y que el movimiento del satélite no sea tan rápido sobre la pantalla.*

Ejercicio 5. Una vez que ha conseguido caracterizar el movimiento del satélite en la órbita Molniya responda a las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo es la velocidad angular del satélite en la proximidad del perigeo?, ¿Y en el apogeo?.
2. ¿Qué relación guardan las órbitas del satélite que se mueve por la elipse y el que lo hace por la circunferencia circunscrita en el apogeo y en el perigeo?.
3. ¿Se cumple aparentemente la segunda ley de Kepler?.
4. Si tuviese que dar cobertura con un satélite que presenta una órbita muy excéntrica a una determinada región del mundo, ¿dónde tendría que estar situada dicha región, en el apogeo o en el perigeo?. Razone la respuesta.

2.3. Representación de las órbitas típicas cercanas a la Tierra.

Sabemos de las clases de Teoría de la asignatura de Comunicaciones Espaciales que las órbitas típicas cercanas a la Tierra (ver la Fig. 9) se pueden clasificar en función de la proximidad a ésta como LEO (*Low Earth Orbit*), MEO (*Medium Earth Orbit*) y GEO Geostacionarios).

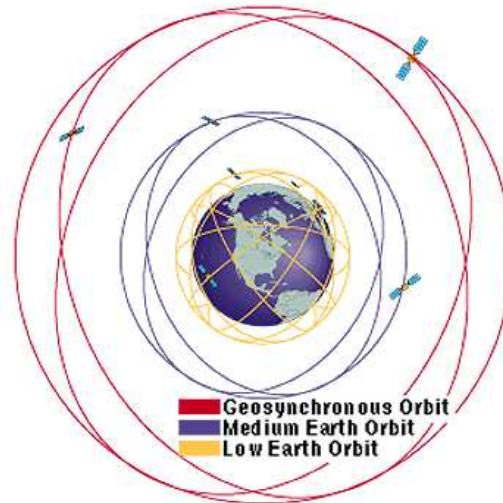


Figura 9: Órbitas típicas de Satélites en función de su proximidad a la Tierra

En esta parte de la práctica se pretende realizar una simulación del movimiento orbital de al menos un satélite en cada una de las órbitas características anteriormente citadas. Para ello, se han escogido los siguientes satélites:

1. Un satélite de tipo LEO característico del sistema *IRIDIUM*, que describe una órbita circular a 750 Km de altura.
2. Un satélite en una órbita circular de tipo MEO con una altura de 10255 Km, correspondiente al sistema *New-ICO*.
3. Un satélite que describe una órbita de tipo Tundra con una excentricidad $e = 0,4$. Este tipo de órbitas son geosíncronas con un periodo igual a un día sideral (23 h, 56m y 4,1 s).
4. Un satélite en órbita geoestacionaria.

Ejercicio 6. Para los satélites descritos anteriormente, encuentre los valores del semieje mayor de la órbita a , el periodo orbital T , la velocidad angular media η , la altura del perigeo h_p y del apogeo h_a , y la excentricidad e .

Ejercicio 7. Siguiendo el procedimiento descrito en la sección anterior 2.2, represente el movimiento de los satélites en sus órbitas. Realice la simulación con una variación temporal de hasta dos días siderales, con saltos de $\Delta t = 15$ minutos. En todos los casos suponga que el tiempo del perigeo t_p es cero. Dibuje la Tierra en la simulación, marcando su centro.

Ejercicio 8. Atendiendo a los resultados obtenidos, ¿se cumple la Tercera ley de Kepler?, ¿y la segunda?.

Ejercicio 9. (*Optativo*). Simule las órbitas de los antiguos nueve planetas del sistema solar (ver la Fig. 10) (ahora son ocho) siguiendo las leyes de Kepler. Como condición inicial suponga que todos los planetas se encuentran con un mismo tiempo de perigeo t_p que por conveniencia puede ser igual a cero. Realice la búsqueda de los datos necesarios de las órbitas por Internet. Tenga en cuenta que el plano de referencia que se utiliza para definir las órbitas de los planetas es el de la eclíptica (plano orbital de la Tierra). El resultado que obtenga se aproximará bastante al real, pero no será exacto debido a la interacción existente entre los distintos cuerpos celeste, la cual no se tiene en cuenta en una primera instancia.

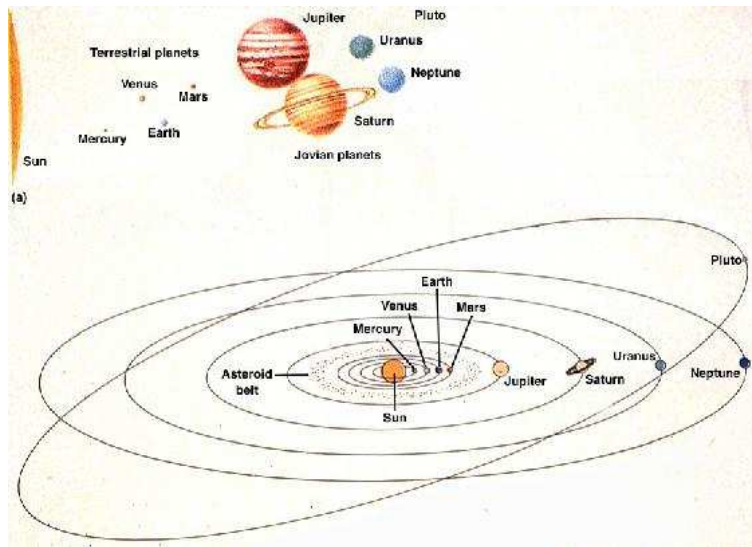


Figura 10: Órbitas de los antiguos nueve planetas del sistema solar

2.4. Localización de un satélite respecto a la Tierra

Una vez que se ha caracterizado la órbita de un satélite en su plano, el siguiente paso natural es representar dicha órbita respecto a un sistema de coordenadas tridimensional centrado en la Tierra, tal y como se refleja en la Fig. 5. Para poder caracterizar completamente la órbita en este nuevo espacio, es necesario conocer tres parámetros más, como son la ascensión recta del nodo ascendente Ω , la inclinación i y el argumento del perigeo ω , representados en la Fig. 11.

Después de haber calculado la posición del satélite en su plano orbital, se puede pasar al nuevo sistema de referencia tridimensional mediante una simple transformación matricial (17) en la que intervienen los parámetros Ω , ω e i .

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = [\tilde{R}] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

En la expresión anteriores, el punto (x_0, y_0) son las coordenadas del satélite en el plano de su

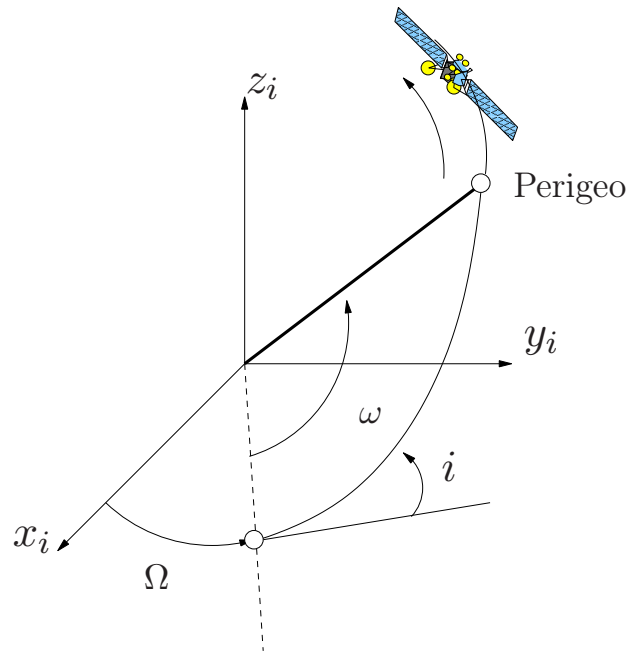


Figura 11: Localización de un satélite respecto a un sistema de coordenadas fijo centrado en la Tierra

órbita, mientras que (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas de este mismo satélite en el sistema de referencia tridimensional representado en la Fig. 11. La matriz de transformación presenta el aspecto recogido a continuación:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} (\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i) & (-\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i) \\ (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i) & (-\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i) \\ (\sin \omega \sin i) & (\cos \omega \sin i) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Ejercicio 10. Teniendo en cuenta la transformación de coordenadas expuesta anteriormente (17), represente utilizando Matlab (comando *plot3*) las trayectorias de las órbitas de los satélites propuestos en la sección anterior 2.2 en el nuevo sistema de coordenadas tridimensional. Asimismo, incluya la representación de la Tierra tridimensional, utilizando el comando *sphere* de Matlab. Para este ejercicio tenga en cuenta los siguientes datos de las órbitas de cada uno de los satélites:

1. Para el satélite en órbita LEO, considere que ésta es polar, la ascensión recta del nodo ascendente $\Omega = 90^\circ$ y que el argumento del perigeo ω es irrelevante al tratarse de un órbita circular.
2. Para el satélite en órbita circular de tipo MEO, considere una inclinación $i = 30^\circ$ y una ascensión recta del nodo ascendente $\Omega = 0^\circ$
3. Para el satélite de tipo Tundra considere una inclinación $i = 63,4^\circ$, una ascensión recta del nodo ascendente $\Omega = 180^\circ$ y un argumento del perigeo $\omega = 270^\circ$.
4. Para el satélite geostacionario recuerde que $i = 0$, y que por las características de la órbita no tiene sentido dar un valor a la ascensión recta del nodo ascendente Ω , ni al argumento del perigeo ω . Razone en la memoria de la práctica a qué se debe lo anterior.

Ejercicio 11. De forma similar a como hizo en la sección anterior, represente el movimiento de los satélites siguiendo su trayectorias tridimensionales. Para ello, calcule en primer lugar la posición instantánea de los satélites en el plano de su órbita, para posteriormente realizar la transformación al espacio tridimensional. Considere un tiempo de perigeo $t_p = 0$ para todas las órbitas, un tiempo de simulación de dos días siderales y un $\Delta t = 15$ min.

2.5. Perturbaciones en las órbitas

El modelo anteriormente utilizado para caracterizar las órbitas de los satélites es ideal, ya que considera que la Tierra es un cuerpo homogéneo y perfectamente esférico, mientras que por otra parte no se tienen en cuenta la acción de fuerzas adicionales como la influencia gravitatoria del Sol y la Luna, la presión de la radiación solar o el rozamiento con la atmósfera. Los factores anteriormente citados provocan que la trayectoria orbital de los satélite no permanezca fija con el tiempo, sino que tenga un comportamiento dinámico.

En esta sección veremos en que se traduce la variación de ciertos parámetros orbitales como consecuencia de la irregularidad del potencial gravitatorio Terrestre. La variación de dichos parámetros orbitales es la siguiente,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4}\eta AJ_2[5 \cos^2 i - 1] \quad (\text{rad/s}) \quad (19)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2}\eta AJ_2 \cos i \quad (\text{rad/s}) \quad (20)$$

$$\frac{dM}{dt} = \eta_0 \left[1 + \frac{3}{4}A\sqrt{1-e}J_2(3 \cos^2 i - 1) \right] \quad (\text{rad/s}) \quad (21)$$

donde,

$$A = \frac{R_E^2}{a^2(1-e^2)^2}$$

R_E Es el radio medio de la Tierra.

e La excentricidad de la órbita.

a La longitud del semieje-mayor de la órbita.

i Es la inclinación de la órbita.

$\eta = \frac{2\pi}{T}$ Es la velocidad angular media del satélite.

$J_2 = 1,0827 \cdot 10^{-3}$ Es el primer armónico zonal par (consecuencia del achatamiento en los polos).

Ejercicio 12. Para los cinco satélites (Molniya, Tundra, LEO, MEO y GEO) descritos en la práctica, calcule las derivas producidas en los parámetros orbitales Ω , ω y M , producidas por las irregularidades del campo gravitatorio terrestre. Diga, cuánto habrán cambiado cada una de esas magnitudes después de un día sideral.

Ejercicio 13. Manteniendo invariables el resto de parámetros orbitales, represente las curvas $\frac{d\omega}{dt}(i)$, $\frac{d\Omega}{dt}(i)$ y $\frac{dM}{dt}(i)$, para los cinco satélites propuestos. Asimismo, consteste a las siguientes preguntas:

1. ¿En qué ángulos de inclinación se producen las variaciones mínimas para cada uno de los parámetros (Ω , ω e i)?, ¿y las máximas?
2. ¿Por qué las órbitas Molniya y Tundra se diseñan con una inclinación de $i = 63,4^\circ$?
3. ¿Para que tipo de órbitas se tienen las mayores variaciones?
4. ¿Cómo escogería los parámetros orbitales para que el satélite mantuviese una órbita heliosíncrona? (tenga que la posición del sol varía $d\Omega/dt = 0,9856^\circ$ por día).

Aunque ha obtenido ciertos resultados para los satélites en órbitas GEO, es menester decir que en este caso existen perturbaciones muy importantes producidas por otros factores como pueda ser la atracción gravitatoria de la Luna y el Sol. Por lo tanto, para tener un modelo exacto hay que tener en cuenta multitud de contribuciones. En la práctica de la asignatura, simplemente se pretende profundizar en el concepto básico de perturbación orbital.

Ejercicio 14. Despreciando la variación de la anomalía media dM/dt , represente de forma dinámica las órbitas de los satélites de la sección anterior teniendo en cuenta el efecto de las variaciones $d\Omega/dt$ y $d\omega/dt$ para cada Δt , es decir:

$$\Omega_1 = \frac{d\Omega}{dt}\Delta t + \Omega_0 \quad (22)$$

$$\omega_1 = \frac{d\omega}{dt}\Delta t + \omega_0 \quad (23)$$

Represente también el movimiento de los satélites en dichas órbitas cambiantes.

2.6. Puntos de Lagrange

El matemático, físico y astrónomo italiano Lagrange(1736-1813), basándose en la mecánica newtoniana, estudio el problema de la interacción gravitatoria entre tres cuerpos. Si uno de los cuerpos es de masa reducida en comparación con los otros dos, se puede colocar en unos puntos de equilibrio, sobre los cuales no cambia su posición relativa en relación a los objetos de mayor masa. A esas localizaciones de equilibrio se las denomina *puntos de Lagrange*, los cuales son las cinco posiciones en el espacio interplanetario donde un objeto pequeño afectado sólo por la gravedad puede estar teóricamente estacionario respecto a dos objetos más grandes (Ej. Sistema Tierra–Luna, Sistema Tierra–Sol).

En los puntos de Lagrange la fuerza gravitatoria de las dos masas grandes y la fuerza centrífuga en el objeto pequeño se cancelan (de forma análoga a las órbitas geosíncronas permiten a un objeto estar en una posición *fija* en el espacio en lugar de una órbita en que su posición relativa cambia continuamente).

Tres de los puntos que son inestables (L_1, L_2 y L_3) y dos estables (L_4 y L_5). El punto L_1 ha sido aprovechado por las misiones científicas de observación del Sol (ACE, Genesis, ISEE y SOHO). El punto L_2 ha sido aprovechado por el *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)*.

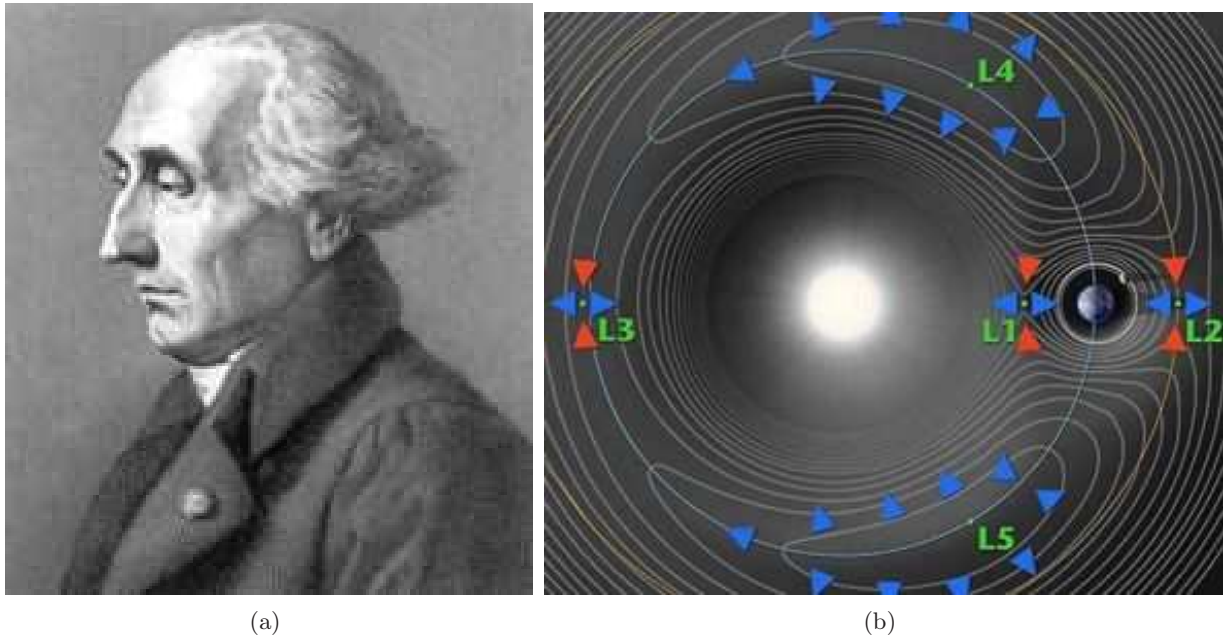


Figura 12: Lagrange y la situación de los puntos de equilibrio de Lagrange en el sistema Tierra-Sol

Para poder localizar los puntos de Lagrange se debe cumplir el equilibrio entre tres fuerzas. Por ejemplo, para el sistema Tierra-Sol, se ha de compensar la fuerza centrípeta del satélite con las de atracción gravitatoria del Sol y la Tierra que actúan sobre éste, es decir:

$$\vec{F}_{Sol} + \vec{F}_{Tierra} + \vec{F}_{Out} = 0 \quad (24)$$

Ejercicio 15. Establezca el balance de fuerzas de la ecuación (24) atendiendo a la Fig. 13.

Ejercicio 16. Represente el balance de fuerzas anterior en el plano XY (para ello utilice los comandos de Matlab *meshgrid* e *imagesc*). Asimismo, tenga en cuenta los valores de las siguientes constantes: Masa de la Tierra $m_E = 5,97 \cdot 10^{24}$ Kg, masa del Sol $m_S = 1,9891 \cdot 10^{30}$ Kg, periodo orbital de la Tierra $T_E = 365,2564$ días, excentricidad de la órbita de la Tierra $e_E = 0,0167$, longitud del semieje mayor de la órbita elíptica de la Tierra $a_E = 149597887,5$ Km, distancia media de la Tierra al Sol $R_{ES} = 149597871$ Km. Nota: para poder observar el balance de fuerzas represente el módulo de éste en dB , debido al gran margen dinámico existente. Sitúe la Tierra a su distancia media respecto al Sol. El centro de masas según el sistema de coordenadas empleado se calcula como $C_{masas} = \frac{m_E \cdot R_{ES} + m_S \cdot 0}{m_E + m_S}$, al encontrarse el Sol centrado en el origen. Haga la representación desde $-1,3 \cdot afelio$ a $1,3 \cdot afelio$.

Ejercicio 17. Represente el balance de fuerzas anterior en un corte que incluya al Sol, la Tierra y los puntos de Lagrange L_1 , L_2 y L_3 . ¿A qué distancia se encuentran estos puntos de la Tierra y del Sol?

Ejercicio 18. Repita los tres ejercicios anteriores para el sistema Tierra-Luna. Tenga en cuenta el valor de la masa de la Luna $m_L = 7,348 \cdot 10^{22}$ Kg, su periodo orbital es $T_L = 27,32166155$ días, la excentricidad de la órbita $e_L = 0,0549$, la longitud del semieje mayor de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra es $a_L = 384582$ Km y la distancia media de la Tierra a la Luna $R_{EL} = 384400$ Km.

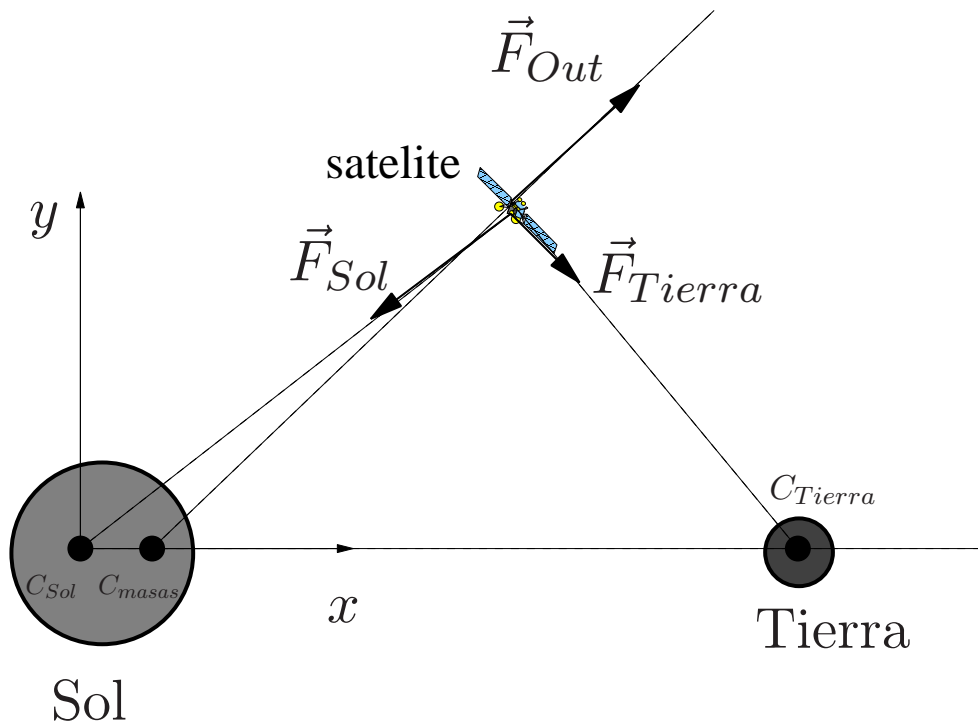


Figura 13: Balance de fuerzas para localizar los puntos de Lagrange.

Es posible que los puntos de Lagrange L_4 y L_5 no se observen fácilmente. Para poder apreciarlos multiplique la masa de la Luna por diez.