

Lección 15

Torsión uniforme

Contenidos

15.1. Distribución de tensiones tangenciales estáticamente equivalentes a un momento torsor	186
15.2. Torsión uniforme en barras prismáticas de sección circular. Teoría elemental de la torsión	186
15.3. Torsión uniforme en barras prismáticas de sección no circular maciza	188
15.4. Torsión uniforme en barras prismáticas de secciones transversales cuadradas y rectangulares	189
15.5. Torsión uniforme en barras prismáticas de sección de pared delgada	190
15.6. Sistemas hiperestáticos sometidos a torsión uniforme . .	193
15.7. Torsión no uniforme en barras prismáticas	194
15.8. Ejercicios propuestos	195

15.1 Distribución de tensiones tangenciales estáticamente equivalentes a un momento torsor

Una barra prismática trabaja a *torsión uniforme* cuando el único esfuerzo presente es un momento torsor, constante a lo largo de toda ella, y el desplazamiento de todos los puntos de la superficie de la barra es libre. Cualquier barra torsionada que no cumpla alguna de las dos condiciones anteriores trabaja a *torsión no uniforme*.

15.2 Torsión uniforme en barras prismáticas de sección circular. Teoría elemental de la torsión

Las barras prismáticas de sección circular son el elemento estructural más común sometido a torsión. Se puede demostrar que debido a la simetría de la sección transversal, las secciones transversales planas normales al eje de la barra permanecen planas durante la deformación y no sufren distorsión en su propio plano. Esto se aprecia en la Figura 15.1. Se ha trazado una rejilla sobre la barra sin deformar, como se muestra en la Figura 15.1 a). Al deformarse, las secciones transversales circulares permanecen siendo circulares y las líneas longitudinales forman hélices que intersecan a los círculos según ángulos iguales, como se muestra en la Figura 15.1 b).

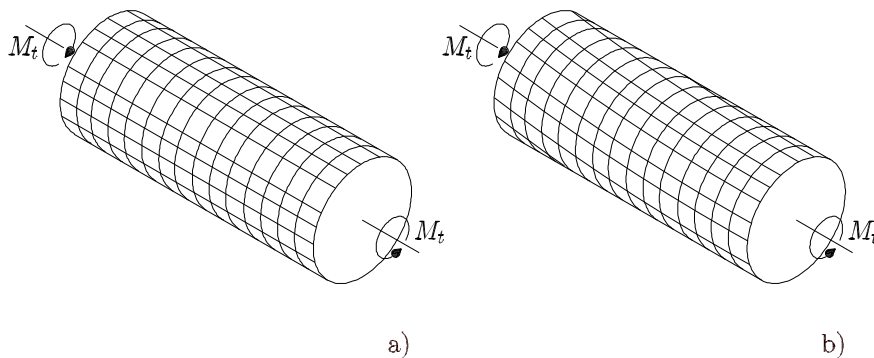


Figura 15.1 Deformación de una barra prismática de sección circular sometida a torsión uniforme

Sea una rebanada diferencial de la barra, de longitud dx , como se muestra en la Figura 15.2. Se considerará un elemento en la superficie de esta, definido por sus vértices a , b , c y d . Los lados ab y cd son inicialmente paralelos al eje longitudinal. Durante la torsión de la barra, las secciones transversales extremas giran una respecto a la otra un ángulo $d\phi$, de manera que, considerando como referencia la sección extrema de la izquierda, los puntos b y c pasan a la posición b' y c' . Se considera que las longitudes de los lados del elemento, ahora ab' y dc' , no han cambiado. Sin embargo, si se ha producido una deformación angular, de valor

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{bb'}{ab} \quad (15.1)$$

$\gamma_{\text{máx}}$ viene expresada en radianes. La distancia ab es la longitud de la rebanada diferencial, dx .

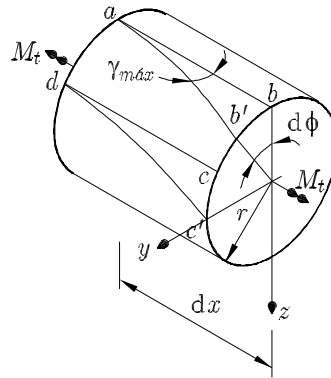


Figura 15.2 Rebanada diferencial sometida a torsión pura

Por otro lado, si r es el radio de la sección transversal, bb' puede expresarse como $r d\phi$, y la ecuación (15.1) como

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{r d\phi}{dx} \quad (15.2)$$

En la ecuación 15.2 $\frac{d\phi}{dx}$ es la razón de cambio del ángulo de torsión con respecto a la distancia x medida a lo largo del eje de la barra. Dicha razón se denota con la letra θ y se denomina *ángulo de torsión por unidad de longitud*,

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} \quad (15.3)$$

Sustituyendo en la ecuación (15.2) la (15.3), aquella toma la forma

$$\gamma_{\text{máx}} = r\theta \quad (15.4)$$

Como los radios en las secciones transversales permanecen rectos y sin deformar durante la torsión, el análisis realizado anteriormente es válido para cualquier elemento sobre la superficie de un cilindro interior de radio r . Por tanto, la deformación angular tiene la expresión

$$\gamma = \rho\theta = \frac{\rho}{r}\gamma_{\text{máx}} \quad (15.5)$$

La ecuación (15.5) implica que las deformaciones angulares en una barra circular varían linealmente con la distancia radial ρ desde el centro. Es nula en el centro y máxima en la superficie exterior. Esta variación lineal implica que $\frac{d\phi}{dx}$ es constante.

Conocida la deformación, el estado tensional se puede determinar a partir de la relación tensión-deformación para el material de la barra. Si el material es elástico y lineal, la ley de Hooke establece como relación entre la tensión y la deformación tangenciales

$$\tau = G\gamma \quad (15.6)$$

Sustituyendo (15.2) en (15.6), la tensión tangencial máxima es

$$\tau_{\text{máx}} = Gr \frac{d\phi}{dx} \quad (15.7)$$

que al igual que las deformaciones, tiene una distribución lineal y es nula en el centro y máximo en la superficie, como se muestra en la Figura 15.3.

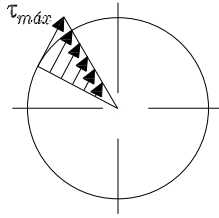


Figura 15.3 Distribución de tensiones en una sección circular de una barra prismática sometida a torsión uniforme

El momento torsor resultante de la actuación de la tensión tangencial es

$$M_x(x) = \int_S r \tau \, dS = G \frac{d\phi}{dx} \int_S r^2 \, dS = G \frac{d\phi}{dx} I_p \quad (15.8)$$

El ángulo de torsión, a partir de la ecuación anterior, es

$$\phi = \int \frac{M_x(x)}{GI_p} \, dx \quad (15.9)$$

siendo S el área e I_p el momento de inercia polar, de la sección transversal.

Por equilibrio, $M_x(x)$ es igual en magnitud al momento torsor M_t aplicado en el extremo de la sección. Expresando las ecuaciones (15.7), (15.8) y (15.9) en función de la sollicitación actuante (M_t), las constantes del material y la geometría de la barra, e integrando (15.9) a lo largo de la barra, se obtienen las ecuaciones fundamentales de la teoría elemental de la torsión

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_t r}{I_p} \quad (15.10)$$

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p} \quad (15.11)$$

$$\phi = \frac{M_t L}{GI_p} \quad (15.12)$$

15.3 Torsión uniforme en barras prismáticas de sección no circular maciza

La Figura 15.4 muestra una barra prismática de sección transversal cuadrada sometida a torsión uniforme. Las secciones transversales planas normales al eje de la barra no permanecen planas durante la deformación (experimentan desplazamientos de alabeo) y sufren distorsión en su propio plano. Esto implica que no es posible establecer una teoría sencilla como la expuesta en el apartado 15.2.

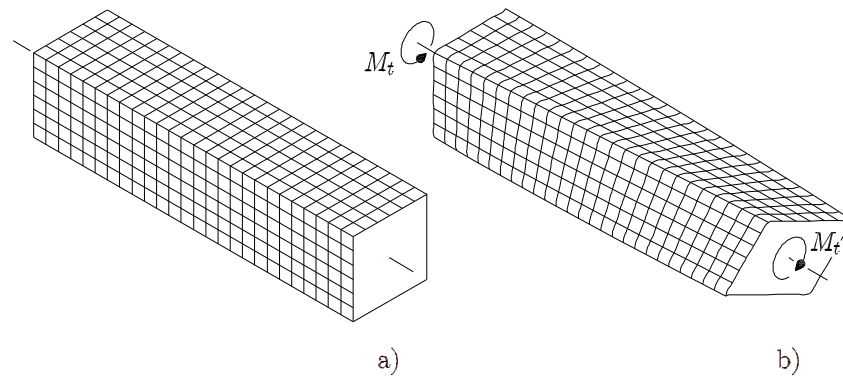


Figura 15.4 Barra prismática de sección transversal cuadrada sometida a torsión

Saint-Venant obtuvo la solución exacta al problema de torsión no uniforme en piezas prismáticas de forma arbitraria, suponiendo que la deformación es uniforme, y consiste en:

- una rotación como sólido rígido de las secciones en su plano, y
- un alabeo de las secciones fuera de su plano.

El problema debe ser formulado haciendo uso del modelo de medio continuo elástico.

L. Prandtl propuso en 1903 que las tensiones fueran expresadas a partir de una *función de tensión* $\Phi(y, z)$, llamada también *función de Prandtl*, de forma que

$$\tau_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial z} \quad \tau_{xz}(x, y, z) = \frac{-\partial \Phi(y, z)}{\partial y} \quad (15.13)$$

El problema se *reduce* a encontrar una función $\Phi(y, z)$ que satisfaga las ecuaciones de compatibilidad y las condiciones de contorno de la torsión uniforme. Esto implica que la función $\Phi(y, z)$ satisfaga la ecuación diferencial

$$\Delta \Phi(y, z) = \frac{\partial^2 \Phi(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi(y, z)}{\partial z^2} = -2G\theta \quad (15.14)$$

con la condición de contorno de que la función de tensión sea constante a lo largo del contorno de la sección.

La resolución analítica de la torsión uniforme en barras prismáticas de sección no circular de sección maciza mediante el planteamiento del párrafo anterior es, en general, muy compleja. No obstante, se han obtenido distintas expresiones como solución a diferentes tipos de secciones sometidas a torsión.

15.4 Torsión uniforme en barras prismáticas de secciones transversales cuadradas y rectangulares

En la Figura 15.5 se muestran sendas secciones, cuadrada y rectangular, donde se han señalado los puntos de tensión tangencial máxima.

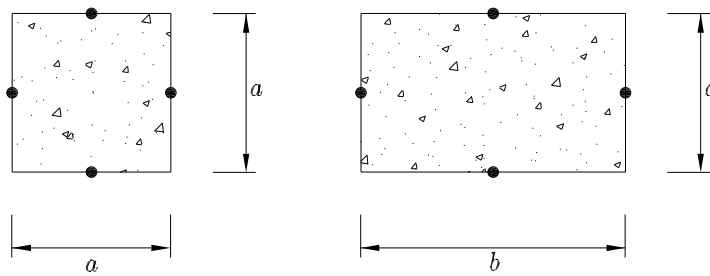


Figura 15.5 Puntos de tensión tangencial máxima en secciones transversales cuadradas y rectangulares sometidas a torsión uniforme

Las expresiones de los valores de la tensión tangencial máxima y del ángulo girado por unidad de longitud, se indican en la Tabla 15.1.

Tabla 15.1 Tensión tangencial máxima y ángulo de torsión en secciones cuadradas y rectangulares

Sección	$\tau_{\text{máx}}$	θ
Cuadrada	$\frac{4,81M_t}{a^3}$	$\frac{7,10M_tL}{a^4G}$
Rectangular	$\frac{M_t}{\alpha ab^2}$	$\frac{M_t}{G\beta ab^3}$

En la Tabla 15.2 se dan los valores de los coeficientes α y β , en función de la relación entre el ancho y el canto de la sección rectangular, utilizados en las expresiones de $\tau_{\text{máx}}$ y θ .

Tabla 15.2 Valores de α y β para secciones rectangulares

a/b	1	1,5	2	2,5	3	4	6	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,256	0,267	0,282	0,299	0,312	0,333
β	0,141	0,229	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,312	0,333

15.5 Torsión uniforme en barras prismáticas de sección de pared delgada

En las barras prismáticas de sección de pared delgada sometidas a torsión uniforme, cada sección sufre un giro distinto alrededor del centro de torsión y unos desplazamientos de alabeo iguales en todas las secciones.

La sección más elemental es la rectangular estrecha que se muestra en la Figura 15.6.

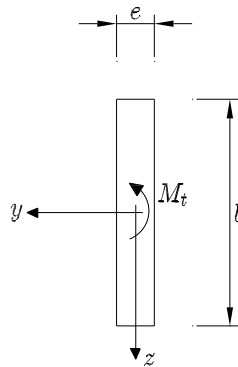


Figura 15.6 Sección rectangular estrecha sometida a torsión

La función de Prandtl para el rectángulo estrecho es

$$\Phi(y) = -G\theta \left(y^2 - \frac{1}{4}e^2 \right) \quad (15.15)$$

y las distribuciones de tensiones son

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial\Phi(y)}{\partial z} = 0 \quad (15.16)$$

$$\tau_{xz}(y) = \frac{\partial\Phi(y)}{\partial y} = -2G\theta y \quad (15.17)$$

En la Figura 15.7 se muestra la distribución de tensiones τ_{xz} la cual varía linealmente en el espesor. Las tensiones máximas se producen en los puntos más alejados de la línea media del rectángulo (en dicha línea media τ_{xz} es nula).

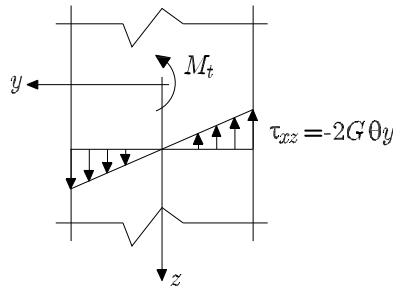


Figura 15.7 Distribución de tensiones tangenciales en una sección rectangular estrecha sometida a torsión

Se puede demostrar que la constante torsional J , el ángulo girado por unidad de longitud de barra θ y la tensión máxima son

$$J = \frac{1}{3}be^3 \quad (15.18)$$

$$\theta = \frac{3M_x(x)}{Gbe^3} \quad (15.19)$$

$$\tau_{xz\text{máx}} = \tau_{xz} \left(y = \pm \frac{e}{2} \right) = \frac{\mp 3M_x(x)}{be^2} \quad (15.20)$$

Las secciones abiertas se pueden generar mediante secciones rectangulares estrechas, como se muestra en la Figura 15.8.

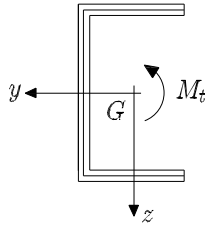


Figura 15.8 Perfil abierto de pared delgada construido mediante adición de rectángulos estrechos

La constante torsional de cualquier perfil abierto de pared delgada puede ser calculada directamente aplicando la ecuación (15.18) a cada rectángulo y sumando:

$$J = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{3} b_i e_i^3 \right) \quad (15.21)$$

siendo n es el número de rectángulo que forman la sección, b_i y e_i son, respectivamente, la longitud y el espesor del rectángulo genérico i .

Las tensiones tangenciales estáticamente equivalentes al momento torsor en perfiles cerrados de pared delgada se distribuyen de forma distinta a como lo hacen en secciones abiertas. Como el espesor de las paredes es muy pequeño, se puede simplificar el cálculo considerando que la tensión tangencial τ_{xs} es constante en el mismo. En la Figura 15.9 se muestra la distribución de tensiones tangenciales, constante, en un tramo de una sección de un perfil cerrado de pared delgada.

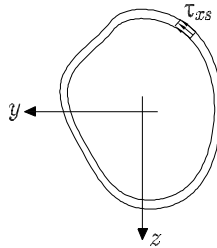


Figura 15.9 Perfil cerrado de pared delgada. Distribución de tensiones tangenciales

Para secciones cerradas de espesor constante, se obtiene:

$$\tau_{xs}(x, s) = \frac{M_x(x)}{2\Omega e} \quad (15.22)$$

siendo Ω el área encerrada por la línea media de la sección. El ángulo girado por unidad de longitud de la barra se obtiene mediante la expresión:

$$\theta = \frac{\tau_{xs}(x, s) S}{2G\Omega} = \frac{M_x(x) S}{4G\Omega^2 e} \quad (15.23)$$

siendo S la longitud de la línea media de la sección. La constante torsional vale

$$J = \frac{4\Omega^2 e}{S} \quad (15.24)$$

15.6 Sistemas hiperestáticos sometidos a torsión uniforme

La forma de abordar este tipo de problemas hiperestáticos es planteando las ecuaciones de equilibrio y tantas ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos¹ como grado de hiperestaticidad de la estructura.

La barra de la Figura 15.10 a), de un material de módulo de elasticidad transversal G , está constituida por dos tramos de igual longitud con secciones transversales circulares de diámetros diferentes. Está empotrada en ambos extremos. En el centro de gravedad de la sección común a ambos tramos actúa un momento torsor M_t .

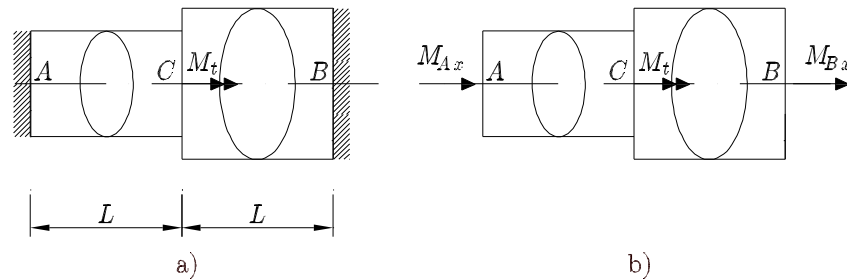


Figura 15.10 a) Barra prismática hiperestática sometida a torsión. b) Reacciones

En los empotramientos A y B , al estar la barra trabajando únicamente a torsión, Figura 15.10 b), solo habrá momentos torsores como reacciones. La única ecuación de la estática que puede plantearse es

$$\sum M_x = 0, \quad M_{Ax} + M_t + M_{Bx} = 0 \quad (15.25)$$

Se tienen dos incógnitas (M_{Ax} y M_{Bx}) y una ecuación (15.25); por tanto, el grado de hiperestaticidad es uno. Es necesaria una ecuación adicional. Esta puede ser la ecuación de compatibilidad de giros, ya que se conoce que es nulo el giro relativo de las secciones empotradas:

$$\phi_B = \phi_A + \phi_{AC} + \phi_{CB} = 0 \quad (15.26)$$

Para resolver el sistema formado por (15.25) y (15.26) es necesario expresar esta última en función de las incógnitas hiperestáticas. La ecuación

$$\phi = \frac{M_x(x) L}{GI_p} \quad (15.27)$$

expresa el ángulo de torsión en una sección de una barra sometida a torsión en función del momento torsor ($M_x(x)$), el momento de inercia polar (I_p) y el módulo de elasticidad transversal del material (G). En la Figura 15.11 se muestran los sólidos libres de cada uno de los tramos para el cálculo de los esfuerzos de torsión.

¹Hay que entender aquí *desplazamientos* como *desplazamientos generalizados* (desplazamientos y giros), ya que se va a trabajar con giros.

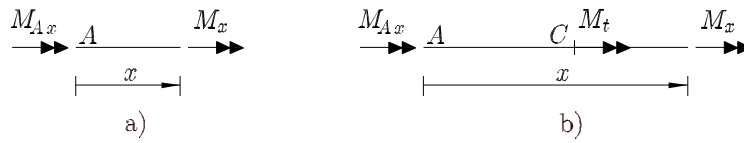


Figura 15.11 a) Sólido libre del tramo AC. b) Sólido libre del tramo CB

Los esfuerzos momentos torsores son

Tramo AC: $0 \leq x \leq L$

$$M_x(x) = -M_{Ax} \quad (15.28)$$

Tramo CB: $L \leq x \leq 2L$

$$M_x(x) = -(M_{Ax} + M_t) \quad (15.29)$$

Sustituyendo (15.28) y (15.29) en (15.27) y el resultado en (15.26), se obtiene

$$\phi_B = \phi_A + \frac{M_{x_{AC}}L}{GI_{p_{AC}}} + \frac{M_{x_{CB}}L}{GI_{p_{CB}}} = -\frac{M_{Ax}L}{GI_{p_{AC}}} - \frac{(M_{Ax} + M_t)L}{GI_{p_{CB}}} = 0 \quad (15.30)$$

Además, se conoce que $\phi_A = \phi_B = 0$. Sustituyendo estos valores en (15.30), se obtiene

$$\frac{M_{Ax}L}{GI_{p_{AC}}} + \frac{(M_{Ax} + M_t)L}{GI_{p_{CB}}} = 0 \quad (15.31)$$

De (15.31) se obtiene M_{Ax} ,

$$M_{Ax} = -\frac{M_t I_{p_{AC}}}{I_{p_{AC}} + I_{p_{CB}}} \quad (15.32)$$

Sustituyendo (15.32) en (15.25) se obtiene M_{Bx} ,

$$M_{Bx} = -\frac{M_t I_{p_{CB}}}{I_{p_{AC}} + I_{p_{CB}}} \quad (15.33)$$

Conocidas las reacciones en los apoyos, las leyes de torsores y el ángulo de torsión de cada tramo se obtienen sustituyendo las reacciones en las ecuaciones (15.28), (15.29) y (15.27).

15.7 Torsión no uniforme en barras prismáticas

Si la barra trabaja a torsión no uniforme, el elemento desarrolla además de tensiones tangenciales, tensiones normales que varían a lo largo de la barra, lo que implica tensiones tangenciales similares a las que se producen en flexión.

Si las barras trabajando a torsión no uniforme no son propensas a alabear significativamente (las deformaciones longitudinales son pequeñas), se puede utilizar la

teoría de torsión uniforme. Esta simplificación es posible hacerla en el caso de secciones macizas, secciones delgadas cerradas, tubos y secciones formadas por rectángulos estrechos que se cortan en un único punto (por ejemplo, los angulares y los perfiles en T).

15.8 Ejercicios propuestos

Ejercicio 15.1

Una barra de 1,25 m de longitud, con sección transversal circular de 50 mm de diámetro, está sometida a un momento torsor $M_t = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$. El material tiene un módulo de elasticidad transversal $G = 80 \text{ GPa}$. Determinar:

1. La tensión tangencial máxima
2. El ángulo total girado

Solución:

1. La tensión tangencial máxima

$$\tau_{\text{máx}} = 20,37 \text{ MPa}$$

2. El ángulo total girado

$$\phi = 0,0127 \text{ rad}$$

Ejercicio 15.2

La barra biempotrada que se muestra en la Figura 15.12, de sección transversal tubular, con diámetros exteriores \varnothing_{AC} en el tramo AC y \varnothing_{CB} en el tramo CB , y espesor e en ambos tramos, está sometida a un momento torsor en C .

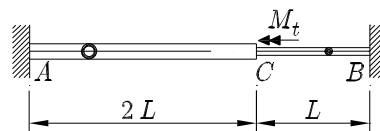


Figura 15.12 Barra biempotrada escalonada de sección tubular sometida a torsión

Obtener:

1. Las reacciones en los apoyos
2. La tensión tangencial máxima en cada uno de los tramos (AC y CB)

Datos:

$$\begin{aligned}
 L &= 250 \text{ mm} , \varnothing_{AC} = 25 \text{ mm} , \varnothing_{CB} = 15 \text{ mm} , e = 5 \text{ mm} \\
 M_t &= 15000 \text{ N}\cdot\text{mm} \\
 I_p &= \frac{\pi \cdot \varnothing^4}{32} \\
 G &= 80 \text{ GPa}
 \end{aligned}$$

Solución:

1. Las reacciones en los apoyos

$$M_{AX} = 11590,91 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$M_{BX} = 3409,09 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

2. La tensión tangencial máxima en cada uno de los tramos (AC y CB)

$$\tau_{\text{máx}_{AC}} = -4,34 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{máx}_{CB}} = 5,21 \text{ MPa}$$

Ejercicio 15.3

Para la sección tubular rectangular abierta que se muestra en la Figura 15.13

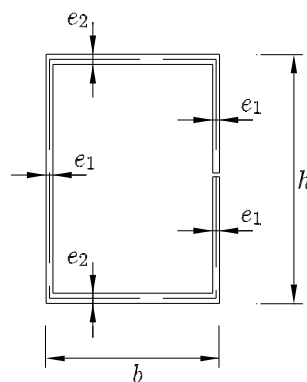


Figura 15.13 Sección tubular rectangular abierta

Obtener:

1. La constante torsional J

2. El máximo momento torsor que puede resistir la sección para un valor máximo admisible de la tensión tangencial τ

Datos:

$$h = 100 \text{ mm} , b = 70 \text{ mm} , e_1 = 2,7 \text{ mm} , e_2 = 4 \text{ mm}$$

Solución:

1. La constante torsional J

$$J = 4298,867 \text{ mm}^4$$

2. El máximo momento torsor que puede resistir la sección para un valor máximo admisible de la tensión tangencial τ

$$M_{t_{\text{máx}}} = 1074,71 \text{ MPa} \text{ (Se considera } \tau \text{ expresada en MPa)}$$

