

Lección 13

Desplazamientos en flexión

Contenidos

13.1. Ecuación diferencial de la curva elástica	166
13.2. Teoremas de Mohr	169
13.2.1. Primer Teorema de Mohr	169
13.2.2. Segundo teorema de Mohr	170
13.3. Cálculo de desplazamientos por métodos energéticos.	
Teorema de las Fuerzas Virtuales	171
13.4. Trazado aproximado de la deformada de una estructura	172
13.5. Deformaciones debidas a tensiones tangenciales	173
13.5.1. Deformación por esfuerzo cortante	173
13.6. Limitación de las deformaciones según el CTE	174
13.7. Ejercicios propuestos	174

13.1 Ecuación diferencial de la curva elástica

La curva (línea) elástica es la configuración que adopta la directriz de una barra prismática trabajando a flexión. El análisis que se desarrolla a continuación es válido para barras rectas que se deforman elásticamente por cargas contenidas en el plano de simetría de la sección transversal y aplicadas perpendicularmente al eje x de la barra. El eje x coincide con la directriz de la barra y su sentido positivo es hacia la derecha. El eje z se dispone con sentido positivo hacia abajo. La ecuación de la curva elástica se denotará por w y es función de x (ver Figura 13.1).

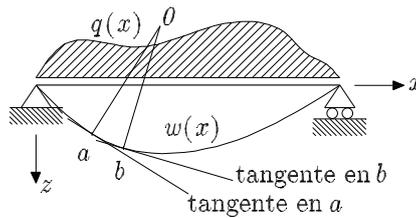


Figura 13.1 Barra prismática. Curva elástica

Sean dos secciones muy próximas, a y b , separadas una distancia ds sobre la línea elástica. El detalle ampliado se muestra en la Figura 13.2 para mayor claridad. El ángulo que la tangente en a forma con el eje x se denotará con θ . La tangente al punto b forma un ángulo $\theta + d\theta$ con el eje x . Por tanto, ambas tangentes forman un ángulo $d\theta$.

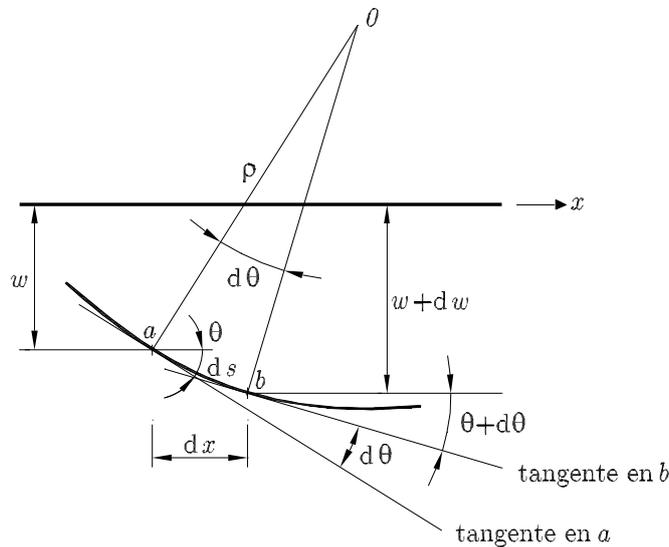


Figura 13.2 Barra prismática. Obtención de la ecuación de la elástica

El arco ds puede expresarse en función del radio de curvatura ρ y del ángulo entre las dos tangentes $d\theta$ como

$$ds = \rho d\theta \quad (13.1)$$

siendo la curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (13.2)$$

Considerando la hipótesis de pequeñas deformaciones, se puede admitir que $ds \cong dx$ y $\theta \cong \tan \theta = \frac{dw(x)}{dx}$, con lo que la ecuación (13.2) queda como

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (13.3)$$

siendo $w(x)$ la función de desplazamientos en dirección z .

Sustituyendo en (13.3) las expresiones obtenidas en el apartado 9.3

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y(x)}{EI_y}$$

se obtiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M_y(x)}{EI_y} \quad (13.4)$$

Para el sistema de ejes considerado, cuando la curva elástica es cóncava hacia arriba (convexa), la pendiente $\frac{dw(x)}{dx}$ es algebraicamente decreciente con x , como se muestra en la Figura 13.3 a), por tanto, $\frac{d^2w(x)}{dx^2}$ es negativa. Del mismo modo, cuando la curva es cóncava hacia abajo, la pendiente $\frac{dw(x)}{dx}$ es algebraicamente creciente con x , como se muestra en la Figura 13.3 b), por tanto, $\frac{d^2w(x)}{dx^2}$ es positiva.

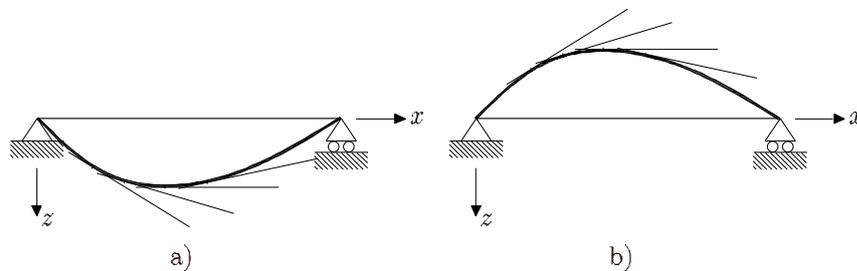


Figura 13.3 Curva elástica. Criterio de signos

Según el criterio de signos adoptado para los esfuerzos en el tema 6, los momentos flectores son positivos cuando producen tracciones en las fibras inferiores de la barra (considerando un sistema de ejes local como el mostrado en la Figura 13.3). Por lo tanto, los momentos positivos disminuyen en el sentido algebraico la curvatura, mientras que los momentos negativos la aumentan. Por consiguiente, la ecuación (13.4), para poder ser aplicada de acuerdo con los criterios considerados debe escribirse como

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EI_y} \quad (13.5)$$

La ecuación anterior es válida siempre que todos los puntos de la barra presenten un comportamiento elástico y las deformaciones sean pequeñas. Debe tenerse presente

también que en la obtención de dicha ecuación no se han considerado las deformaciones debidas al esfuerzo cortante.

Integrando una vez (13.5) se obtiene la ecuación de la pendiente de la curva elástica, e integrando dos veces, se obtiene la curva elástica. En la integración de (13.5) aparecen $2n$ constantes de integración, siendo n el número de tramos necesarios para la obtención de la ley de flectores. Para determinar estas constantes de integración es necesario considerar las condiciones de contorno de la barra. Si con estas no fuera suficiente, se impondrán condiciones de compatibilidad de desplazamientos y giros en los puntos comunes entre tramos considerados en la barra para el cálculo de la ley de momentos.

La ecuación (13.5) puede escribirse de forma alternativa, derivando una vez cada miembro de la ecuación respecto de x

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = -\frac{1}{EI_y} \frac{dM_y(x)}{dx} \Rightarrow EI_y \frac{d^3 w(x)}{dx^3} = -V_z(x) \quad (13.6)$$

Derivando de nuevo respecto de x , se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^3 w(x)}{dx^3} \right) = -\frac{1}{EI_y} \frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} \Rightarrow EI_y \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q_z(x) \quad (13.7)$$

(13.6) y (13.7) son las ecuaciones diferenciales de la curva elástica en función del cortante y de la carga aplicada, respectivamente.

Si se prescinde de la hipótesis de pequeñas deformaciones, no es admisible aproximar la tangente al ángulo, por tanto

$$\theta = \arctan \frac{dw(x)}{dx} \quad (13.8)$$

Por otro lado, el arco ds puede expresarse en función de dx y dw , como

$$ds^2 = dx^2 + dw(x)^2 \Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dw(x)^2} \Rightarrow ds = \sqrt{1 + w'(x)^2} dx \quad (13.9)$$

Habiéndose obtenido la última relación de (13.9) dividiendo ds por dx . Derivando (13.8) se obtiene

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{w''(x)}{1 + w'(x)^2} \quad (13.10)$$

Sustituyendo (13.9) y (13.10) en (13.2), se obtiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{\sqrt{1 + w'(x)^2} dx} = \frac{\frac{w''(x)}{1 + w'(x)^2}}{\sqrt{1 + w'(x)^2}} = \frac{w''(x)}{(1 + w'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (13.11)$$

Finalmente, sustituyendo (13.11) en (13.4), la ecuación diferencial de la curva elástica para grandes deformaciones

$$\frac{M_y(x)}{EI_y} = \frac{w''(x)}{(1 + w'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (13.12)$$

13.2 Teoremas de Mohr

13.2.1 Primer Teorema de Mohr

Permite obtener el giro relativo entre dos secciones de una barra prismática.

El ángulo θ_{AB} entre las tangentes a la curva elástica en dos puntos A y B de la misma, viene dado por el área del diagrama de momentos flectores comprendida entre ambos puntos, dividida por EI_y .

$$\theta_{AB} = \frac{1}{EI_y} \int_A^B M_y(x) dx \quad (13.13)$$

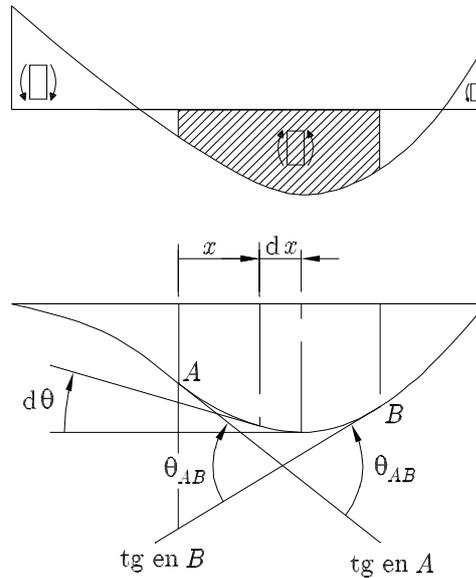


Figura 13.4 Primer teorema de Mohr

La demostración es sencilla. De acuerdo con la ley de Hooke, la tensión en cualquier punto de la sección transversal de la barra es

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (13.14)$$

siendo ε_x la deformación unitaria del punto considerado.

La hipótesis de Navier-Bernoulli puede expresarse como

$$\varepsilon_x = \frac{z d\theta}{ds} \quad (13.15)$$

Sustituyendo (13.15) en (13.14), se obtiene

$$\sigma_x = Ez \frac{d\theta}{ds} \quad (13.16)$$

Teniendo en cuenta que el flector actuante sobre la sección es estáticamente equivalente a la distribución de tensiones sobre la sección, se obtiene

$$M_y(x) = \int_S \sigma_x b z dz = E \frac{d\theta}{ds} \int_S b z^2 dz = EI_y \frac{d\theta}{ds} \quad (13.17)$$

siendo b el ancho de la sección transversal en el punto considerado e I_y el momento de inercia de la sección transversal respecto al eje y . Despejando $d\theta$ de (13.17) se obtiene el ángulo diferencial entre dos secciones separadas ds .

$$d\theta = \frac{M_y(x)}{EI_y} ds \tag{13.18}$$

Al ser los desplazamientos pequeños, se puede sustituir el arco ds por la distancia horizontal dx ; integrando entre los puntos A y B se obtiene

$$\theta_{AB} = \int_A^B \frac{M_y(x)}{EI_y} dx \tag{13.19}$$

donde la integral representa el área del diagrama de momentos flectores comprendida entre ambos puntos, dividida por EI_y .

13.2.2 Segundo teorema de Mohr

La mínima distancia desde un punto A de la curva elástica hasta la tangente a otro punto B de la curva elástica, es igual al momento estático del área del diagrama de momentos flectores respecto del punto A , dividido por EI_y

$$w_{AB} = \frac{1}{EI_y} \int_A^B x M_y(x) dx \tag{13.20}$$

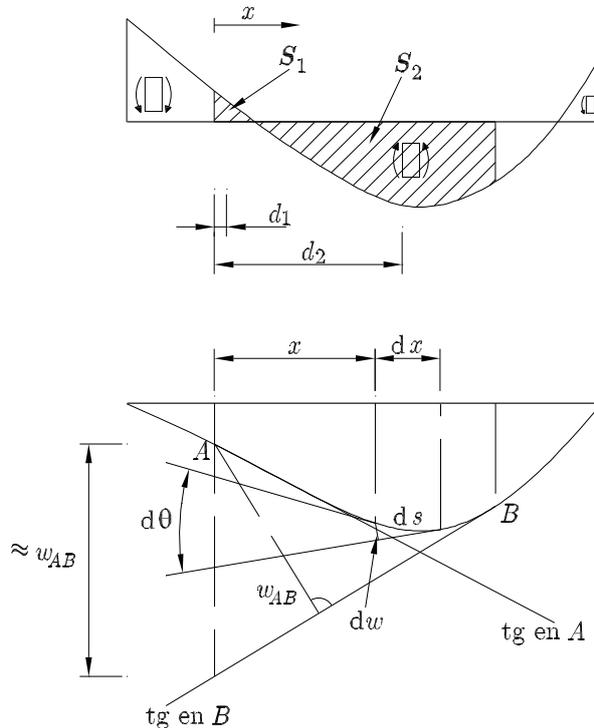


Figura 13.5 Segundo teorema de Mohr

Para demostrar este teorema, se comprueba que la mínima distancia dw desde el punto A de la curva elástica a la tangente a la elástica en el punto de abscisa $x + dx$, que se muestra en la Figura 13.5, es

$$dw = x d\theta \quad (13.21)$$

Aplicando el primer teorema de Mohr e integrando (13.21) entre los puntos A y B se obtiene la distancia mínima desde el punto A de la curva elástica a la tangente a la elástica en el punto B . Por la hipótesis de pequeños desplazamientos se aproxima dicha distancia a la medida entre el punto A de la curva elástica y la intersección de la vertical trazada por A con la tangente en B .

En aquellos casos en que la ley de momentos flectores sea sencilla, las áreas y momentos estáticos de la misma pueden ser calculados fácilmente sin necesidad de realizar las integrales. Los sentidos de los desplazamientos y giros se pueden obtener a partir de las dos reglas siguientes:

- Teniendo en cuenta el criterio de signos adoptado para los momentos en una sección de la pieza y asociando estos mismos signos a las áreas de los diagramas de momentos flectores, un área total positiva corresponde a un giro antihorario de la tangente a la elástica en el punto B respecto a la tangente a la elástica en el punto A .
- Tomando como positivas las distancias que van en el sentido positivo de las abscisas x , un momento estático total positivo supone que el punto A de la elástica está por encima de la tangente a la curva elástica en el punto B .

13.3 Cálculo de desplazamientos por métodos energéticos. Teorema de las Fuerzas Virtuales

Este teorema solo se va a aplicar a barras esbeltas, con la directriz contenida en el plano XZ , las cargas actuando en dicho plano y cuya sección transversal presenta simetría respecto al eje z .

El Teorema de las Fuerzas Virtuales (TFV) se enuncia de la siguiente forma: *la condición necesaria y suficiente para que un campo de desplazamientos u_i sea compatible con un campo de deformaciones ε_{ij} es que se cumpla la igualdad de trabajos externos e internos, para todo campo de tensiones σ_{ij}^* en equilibrio con unas cargas exteriores X_i^* y t_i^**

$$\underbrace{\int_V x_i^* u_i dV}_{\text{trabajo externo}} + \underbrace{\int_S t_i^{c*} u_i^c dS}_{\text{trabajo interno}} = \underbrace{\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV}_{\text{trabajo interno}} \quad (13.22)$$

Considerando un estado de fuerzas y esfuerzos virtuales en equilibrio, el trabajo virtual complementario realizado por los esfuerzos virtuales al moverse sobre las deformaciones reales (trabajo interno) es

$$\begin{aligned} & \int_V (\sigma^*)^T \varepsilon dV = \\ & = \int_L \left[\int_S \left(\frac{N^*(x)}{A(x)} + \frac{M_y^*(x)}{I_y(x)} z \right) \left(\frac{N(x)}{E(x)A(x)} + \frac{M_y(x)}{E(x)I_y(x)} z \right) dA \right] dx = \\ & = \int_L \left(\frac{N^*(x)N(x)}{E(x)A(x)} + \frac{M_y^*(x)M_y(x)}{E(x)I_y(x)} z \right) dx \end{aligned} \quad (13.23)$$

Si sobre la barra se aplican fuerzas virtuales (F_{xi}^*, F_{zi}^*) y/o momentos virtuales (M_{yi}^*) en n puntos, el trabajo virtual externo es

$$\int_V x_i^* u_i dV + \int_S t_i^{c*} u_i^c dS = \sum_{i=1}^n (F_{xi}^* u_i + F_{zi}^* w_i + M_{yi}^* \theta_{yi}) \quad (13.24)$$

siendo u_{xi}, w_{zi} los desplazamientos del punto i según los ejes x y z , y θ_{yi} el giro del punto i alrededor del eje y . Así pues, la expresión del TFV para una barra esbelta es

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (F_{xi}^* u_i + F_{zi}^* w_i + M_{yi}^* \theta_{yi}) = \\ & = \int_L \left(\frac{N^*(x)N(x)}{E(x)A(x)} + \frac{M_y^*(x)M_y(x)}{E(x)I_y(x)} z \right) dx \end{aligned} \quad (13.25)$$

Si la estructura está formada por b barras esbeltas, con fuerzas (F_{xi}, F_{zi}) y/o momentos (M_{yi}) en n puntos, la ecuación (13.25) es

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (F_{xi}^* u_i + F_{zi}^* w_i + M_{yi}^* \theta_{yi}) = \\ & = \sum_{j=1}^b \int_L \left(\frac{N^*(x)N(x)}{E(x)A(x)} + \frac{M_y^*(x)M_y(x)}{E(x)I_y(x)} z \right) dx \end{aligned} \quad (13.26)$$

Si los valores de los esfuerzos y las propiedades de las barras son constantes ($S_j = cte$, $E_j = cte$, $N_j = cte$, $M_{yj} = cte$, e $I_{yj} = cte$), la ecuación (13.26) queda en la forma

$$\sum_{i=1}^n (F_{xi}^* u_{xi} + F_{zi}^* w_{zi} + M_{yi}^* \theta_{yi}) = \sum_{j=1}^b \left(\frac{N_j^* N_j L_j}{E_j A_j} + \frac{M_{yj}^* M_{yj} L_j}{E_j I_{yj}} \right) \quad (13.27)$$

Para la aplicación de este método, lo único que se requiere es que el sistema de cargas que actúa sobre la estructura esté en equilibrio. Puede tomarse como estructura virtual la real sin apoyos y sometida a un estado de cargas resultante de equilibrar la carga o momento unitario (aplicada en la sección cuyo desplazamiento o giro se desea calcular) con cargas y/o momentos aplicados en secciones cuyo desplazamiento y/o giro sea conocido en la estructura real y en la dirección de estos.

13.4 Trazado aproximado de la deformada de una estructura

Para el trazado aproximado de la deformada de una estructura sencilla, es necesario conocer los diagramas de momentos flectores de las barras que la componen. Se conoce que un momento positivo tiende a curvar la barra con concavidad en dirección positiva del eje z local. Por el contrario, un momento negativo tiende a curvar la barra con concavidad en dirección negativa del eje z local. Los puntos de momento cero son puntos de inflexión de la deformada de la barra. Por otro lado, también son conocidas las restricciones a los desplazamientos en los puntos donde se sitúan apoyos.

Con la información indicada en el párrafo anterior, junto con los valores de los desplazamientos y giros que se conozcan o se hayan calculado, se traza, de forma aproximada, la deformada de una estructura simple.

13.5 Deformaciones debidas a tensiones tangenciales

Las tensiones tangenciales producen un deslizamiento entre las superficies adyacentes. La deformación unitaria consiste en una distorsión angular, que para materiales con comportamiento lineal y elástico cumple la ley de Hooke.

$$\gamma = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{\tau}{G} \quad (13.28)$$

siendo G el módulo de elasticidad transversal definido en el tema 4, apartado 4.2.2.

13.5.1 Deformación por esfuerzo cortante

La deformación de una barra por cortante se produce por el deslizamiento relativo entre las secciones adyacentes. La suma de todos estos movimientos elementales da la deformada total de la barra.

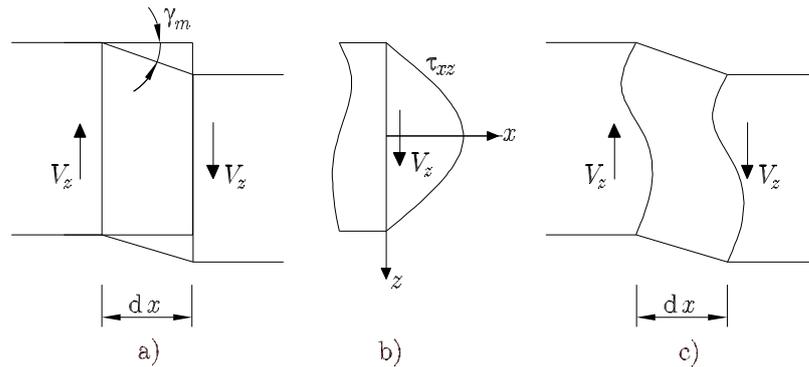


Figura 13.6 Deformación por esfuerzo cortante

En la Figura 13.6 a) se muestra que si las dos caras de la rebanada de espesor dx de la viga se desplazan relativamente entre sí permaneciendo planas, la distorsión angular γ_m es constante a lo largo de la sección. Ahora bien, la deformación angular en cada punto de la sección es proporcional a la tensión tangencial en dicho punto. Como la distribución de tensiones tangenciales no es constante, como se muestra en la Figura 13.6 b), las caras del elemento no permanecen planas sino que se alabean, como se representa en la Figura 13.6 c).

Para evaluar las deformaciones de toda la barra se va a considerar el modelo simplificado de deformación por cortante, representado en la Figura 13.6 a). Se puede escribir

$$w'(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \gamma_m = \frac{\alpha_s V_z(x)}{GS} \quad (13.29)$$

donde $\frac{V_z}{S}$ es la tensión tangencial media, obtenida dividiendo el esfuerzo cortante entre el área de la sección. α_s es un coeficiente por el que hay que multiplicar la

tensión media para obtener la tensión en el centroide de la sección. El valor de α_s depende de la forma de la sección.

Para calcular la ecuación de la elástica debida al cortante se integra la ecuación (13.29)

$$w(x) = \int_0^x \frac{\alpha_s V_z(x)}{GS} dx \quad (13.30)$$

Esta deformación hay que sumarla a la producida por el momento flector para evaluar la deformación total. Si se deriva la ecuación (13.29), se obtiene

$$w''(x) = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{\alpha_s}{GS} \frac{dV_z(x)}{dx} = -\frac{\alpha_s q_z(x)}{GS} \quad (13.31)$$

La ecuación diferencial de la elástica englobando los efectos del flector y cortante queda

$$w''(x) = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EI_z} - \frac{\alpha_s q_z(x)}{GS} \quad (13.32)$$

13.6 Limitación de las deformaciones según el CTE

Según el CTE, cuando se considere la integridad de los elementos constructivos, se admite que la estructura horizontal de un piso o cubierta es suficientemente rígida si, para cualquiera de sus piezas, ante cualquier combinación de cargas características, considerando solo las deformaciones que se producen después de la puesta en obra del elemento, la flecha relativa es menor que:

- $\frac{1}{500}$ en pisos con tabiques frágiles (como los de gran formato, rasillones, o placas) o pavimentos rígidos sin juntas
- $\frac{1}{400}$ en pisos con tabiques ordinarios o pavimentos rígidos con juntas
- $\frac{1}{300}$ en el resto de casos

La flecha relativa es el descenso máximo de vano respecto al extremo de la pieza que lo tenga menor, dividido por la luz del tramo. En el caso de voladizos se considera como luz el doble del vuelo.

Cuando se considere el confort de los usuarios, se admite que la estructura horizontal de un piso o cubierta es suficiente rígida si, para cualquiera de sus piezas, ante cualquier combinación de acciones características, considerando solamente las acciones de corta duración, la flecha relativa, es menor que $\frac{1}{350}$.

13.7 Ejercicios propuestos

Ejercicio 13.1

Para la viga de la Figura 13.7

Obtener, utilizando la ecuación diferencial de segundo orden de la curva elástica:

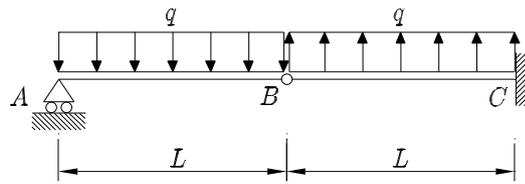


Figura 13.7 Viga articulada-empotrada con rótula intermedia y cargas distribuidas uniformemente

1. Las ecuaciones de la curva elástica y de giros
2. El desplazamiento vertical del punto B
3. El giro del nudo A
4. La deforma aproximada de la estructura

Datos:

$$\begin{aligned} L &= 4 \text{ m} \\ I_y &= 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4 \\ q &= 17 \text{ kN/m} \\ E &= 20 \text{ GPa} \end{aligned}$$

Solución:

1. Las ecuaciones de la curva elástica y de giros

$$w' = \begin{cases} \frac{1}{EI_y} [2,833x^3 - 17x^2 + 90,666] & 0 \leq x \leq L \\ \frac{1}{EI_y} [-2,833x^3 + 51x^2 - 272x + 362,666] & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$w = \begin{cases} \frac{1}{EI_y} [0,708x^4 - 5,666x^3 + 90,666x] & 0 \leq x \leq L \\ \frac{1}{EI_y} [-0,708x^4 + 17x^3 - 136x^2 + 362,666] & L \leq x \leq 2L \end{cases}$$

2. El desplazamiento vertical del punto B

$$w(x=L) = w_B = 0,0165 \text{ m}$$

3. El giro del nudo A

$$w'(x=0) = w'_A = 0,00824 \text{ radianes}$$

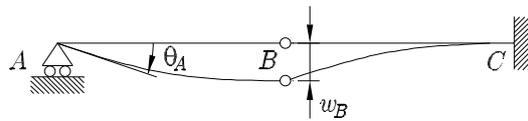


Figura 13.8 Viga articulada-empotrada con rótula intermedia y cargas distribuidas uniformemente. Deformada aproximada

4. La deforma aproximada de la estructura

Ejercicio 13.2

Para la viga de la Figura 13.9

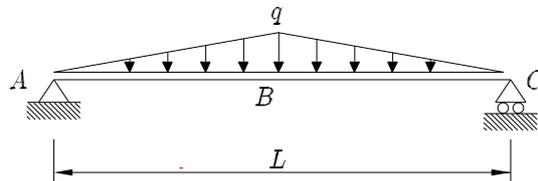


Figura 13.9 Viga biapoyada con cargas triangulares simétricas

Obtener, utilizando los teoremas de Mohr:

1. El desplazamiento vertical del punto B
2. Los giros de los puntos A y C
3. La deforma aproximada de la estructura

Datos:

$$\begin{aligned} L &= 4 \text{ m} \\ I_y &= 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4 \\ q &= 15 \text{ kN/m} \\ E &= 20 \text{ GPa} \end{aligned}$$

Solución:

1. El desplazamiento vertical del punto B

$$w(x=L) = w_B = 0,0071 \text{ m}$$

2. Los giros de los puntos A y C

$$w'(x=0) = w'_A = 0,00444 \text{ radianes}$$

$$w'(x=L) = w'_C = -0,00444 \text{ radianes}$$

3. La deforma aproximada de la estructura

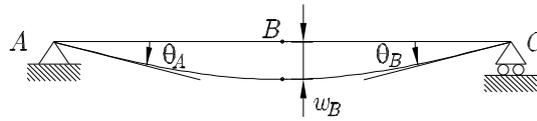


Figura 13.10 Viga biapoyada con cargas triangulares simétricas. Deformada aproximada

Ejercicio 13.3

Para la viga de la Figura 13.11

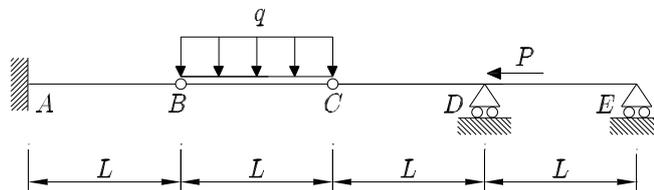


Figura 13.11 Viga continua con doble rótula y carga uniformemente distribuida

Obtener, utilizando el Principio de las Fuerzas Virtuales:

1. Los desplazamientos verticales de los puntos B y C
2. Los giros de los puntos D y E
3. La deforma aproximada de la estructura

Datos:

$$\begin{aligned} L &= 2,5 \text{ m} \\ I_y &= 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4 \\ P &= 50 \text{ kN} , q = 15 \text{ kN/m} \\ E &= 20 \text{ GPa} \end{aligned}$$

Solución:

1. Los desplazamientos verticales de los puntos B y C

$$\begin{aligned} w(x=L) &= w_B = 0,00888 \text{ m} \\ w(x=2L) &= w_C = 0,01776 \text{ m} \end{aligned}$$

2. Los giros de los puntos D y E

$$w'(x = 3L) = w'_D = -0,00355 \text{ radianes}$$

$$w'(x = 4L) = w'_E = 0,00177 \text{ radianes}$$

3. La deforma aproximada de la estructura

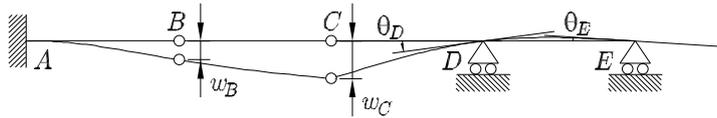


Figura 13.12 Viga continua con doble rótula y carga uniformemente distribuida.
Deformada aproximada