Lección 12

Flexión plástica

Contenidos

12.1. Modelado del comportamiento del material 148
12.2. Plastificación de la sección en flexión pura 148
12.2.1. Momento plástico
12.2.2. Módulo plástico
12.2.3. Factor de forma \ldots 152
12.2.4. Eje neutro en secciones plastificadas $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 152$
12.2.5. Diagrama momento-curvatura
12.3. Plastificación de la sección en flexión compuesta 154
12.3.1. Plastificación de la sección en flexión compuesta: Plastificación parcial
12.3.2. Plastificación de la sección en flexión compuesta: Plastificación total
12.4. Plastificación en secciones sometidas a flexión simple 156
12.5. Formación de rótulas plásticas 158
12.6. Ejercicios propuestos

12.1 Modelado del comportamiento del material

El comportamiento de los aceros de bajo contenido en carbono puede modelarse mediante el diagrama tensión-deformación de la Figura 12.1 a), que se conoce como comportamiento *elastoplástico perfecto*, o mediante el diagrama tensión-deformación de la Figura 12.1 b) en el que se considera el endurecimiento por deformación.



Figura 12.1 Diagramas elastoplásticos del acero. a) Comportamiento elastoplástico perfecto b) Comportamiento elastoplástico con endurecimiento

Ambos modelos de comportamiento suponen que los límites de proporcionalidad, elástico y de fluencia coinciden. El modelo *elastoplástico perfecto* supone que la tensión de fluencia del material se mantiene constante para cualquier deformación superior a la del límite elástico. El *elastoplástico con endurecimiento* admite un aumento de la resistencia a partir de deformaciones $k \varepsilon_e$ siendo k del orden de 10 a 15. En ambos modelos se admiten idénticos comportamientos en tracción y compresión, tanto para el límite elástico como para el módulo de elasticidad.

12.2 Plastificación de la sección en flexión pura

En la Figura 12.2 se muestran una sección bisimétrica sometida a un momento flector según el eje y, y los diagramas planos de las distribuciones de deformaciones longitudinales y tensiones normales correspondientes. En ninguna de la fibras se ha alcanzado la deformación del límite elástico y en consecuencia las tensiones en cualquier punto de la sección están por debajo del límite elástico del material.



Figura 12.2 Diagramas de distribución de deformaciones y de tensiones en régimen elástico

Las distribuciones de tensiones y deformaciones son lineales, respondiendo a las ecuaciones

$$\sigma_x(y,z) = \frac{M}{I_y}z \tag{12.1}$$

$$\varepsilon(z) = \frac{\sigma_x(y,z)}{E} = \frac{M}{EI_y}z = \chi z$$
 (12.2)

siendo E el módulo de elasticidad longitudinal y χ la curvatura de la sección. Considerando una rebanada diferencial de un elemento estructural, la curvatura χ de la sección es el ángulo que se inclina una cara de la rebanada respecto de la otra, dividido por la distancia que las separa. Si se consideran dos secciones separadas una unidad de longitud, la curvatura es

$$\chi = \frac{\varepsilon \left(z\right)}{z} \tag{12.3}$$

Si el momento flector se va incrementando, la tensión y la deformación en cada fibra de la sección aumentan. Habrá un valor de M para el que la deformación en las fibra extremas (las más tensionadas) coincida con la deformación en el límite elástico, ε_e , correspondiéndoles la tensión del límite elástico, σ_e . En la Figura 12.3 se muestran los diagramas planos de las distribuciones de deformaciones longitudinales y tensiones normales.



Figura 12.3 Diagramas de distribución de deformaciones y de tensiones en régimen elástico con las fibras extremas alcanzando el límite elástico

Si se sigue incrementando el momento flector, se llegará a un estado tal que las fibras extremas de la sección habrán superado la deformación correspondiente al límite elástico junto con parte de las contiguas, trabajando todas ellas a una misma tensión σ_e . En la Figura 12.4 se muestran los diagramas planos de las distribuciones de deformaciones longitudinales y tensiones normales correspondientes.



Figura 12.4 Diagramas de distribución de deformaciones y de tensiones en régimen elastoplástico

(c) 2011 Santiago Torrano & D. Herrero Pérez

Si se sigue incrementando M, habrá una extensa zona de la sección donde todas las fibras superen la deformación correspondiente al límite elástico y por tanto trabajen a la tensión del límite elástico, como se muestra en la Figura 12.5.



Figura 12.5 Diagramas de distribución de deformaciones y de tensiones en régimen elastoplástico. Gran parte de la sección plastificada

La deformación en el límite elástico para un acero es función del tipo de acero, estando acotada entre $\varepsilon_e = 0,00112$ para un acero con $\sigma_e = 235$ MPa y $\varepsilon_e = 0,00169$ para un acero con $\sigma_e = 355$ MPa.

Considerando una deformación longitudinal unitaria en rotura para el acero de $\varepsilon_{\rm rot} = 0,01$, cuando en la fibra más tensionada de la sección se alcance la deformación correspondiente a la rotura, la zona de la sección trabajando en régimen elástico, que se muestra en la Figura 12.6, será

$$\frac{z_0}{\varepsilon_{\rm rot}} = \frac{z_1}{\varepsilon_e} = \frac{z_1}{\varepsilon_{\rm lim}} \tag{12.4}$$

es decir, la zona elástica tiene una extensión como máximo el doble de z_1 (en el caso de que la sea sección simétrica respecto al eje neutro), siendo z_1

$$z_1 = \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_{\rm rot}} \, z_0 \tag{12.5}$$



Figura 12.6 Diagramas de distribución de deformaciones y de tensiones en régimen elastoplástico. Fibras más tensionadas con la deformación en rotura

Así, para un acero con $\varepsilon_e = 0,00169$, la zona trabajando en régimen elástico será, como máximo,

$$2 \times z_1 = 2 \times \frac{0,00169}{0,01} z_0 = 0,338 z_0 \tag{12.6}$$

De la ecuación (12.6) se deduce que dicha zona es muy pequeña en relación con la zona plastificada. Por este motivo se acepta la distribución de tensiones mostrada en la Figura 12.7, en la que toda la sección está totalmente plastificada. Dicha distribución corresponde al caso, teórico, de curvatura infinita de la sección.



Figura 12.7 Diagramas de distribución de deformaciones y de tensiones en régimen plástico

12.2.1 Momento plástico

El momento que produce el estado tensional mostrado en la Figura 12.7 recibe el nombre de momento plástico (M_p) . Al ser dicho momento estáticamente equivalente al momento producido por la distribución de tensiones normales, ha de cumplirse que

$$M_p = \int_{z_c}^{z_t} z \,\sigma_x \left(x, y, z \right) \, b \, \mathrm{d}z \tag{12.7}$$

siendo z_t y z_c las alturas, en valor absoluto, de las zonas traccionada y comprimida, respectivamente y b el ancho de la sección. Al ser $\sigma_x(y, z) = \sigma_e$ en la zona traccionada y $\sigma_x(x, y, z) = -\sigma_e$ en la zona comprimida, sustituyendo en (12.7) se obtiene

$$M_p = \int_{z_c}^{z_t} z \,\sigma_x \left(x, y, z \right) \ b \, \mathrm{d}z = \sigma_e \, \int_0^{z_t} z \, b \, \mathrm{d}z + \sigma_e \, \int_{z_c}^0 z \, b \, \mathrm{d}z \tag{12.8}$$

Las integrales corresponden a los momentos estáticos de las áreas traccionada y comprimida de la sección respecto al eje neutro. Por tanto, (12.8) se puede reescribir (considerando los valores absolutos de Q_{y_t} y Q_{y_c}) como

$$M_{p} = \sigma_{e} \left[Q_{y_{t}} \left(z \right) + Q_{y_{c}} \left(z \right) \right]$$
(12.9)

12.2.2 Módulo plástico

En el apartado 9.5, se dio el concepto de módulo resistente y se expresó la tensión en un punto en función del módulo resistente asociado a dicho punto como

$$\sigma_x(y,z) = \frac{M}{W} = \frac{M}{\frac{I_{en}}{h}}$$
(12.10)

siendo h la mínima distancia del punto al eje neutro. El momento elástico M_e , a partir de la ecuación (12.10), puede expresarse como

$$M_e = \sigma_e W \tag{12.11}$$

Comparando las ecuaciones (12.9) y (12.11), el momento plástico puede ser expresado en la forma

$$M_p = \sigma_e W_p \tag{12.12}$$

(c) 2011 Santiago Torrano & D. Herrero Pérez

siendo W_p el *módulo plástico* de la sección

$$W_p = Q_{y_t}(z) + Q_{y_c}(z) \tag{12.13}$$

12.2.3 Factor de forma

La relación entre los momentos plástico (M_p) y elástico (M_e) da una idea de la mayor resistencia de la sección cuando trabaja en régimen plástico.

$$\lambda = \frac{M_p}{M_e} = \frac{W_p}{W} \tag{12.14}$$

Esta relación se denomina factor de forma y se denota con la letra griega λ . El factor de forma depende exclusivamente de la geometría de la sección (tanto W como W_p son solamente función de la geometría de la sección). Cuanto menor sea el factor de forma de una sección, mejor estará diseñada para trabajar a flexión.

12.2.4 Eje neutro en secciones plastificadas

Para determinar la posición del eje neutro en una sección plastificada se van a plantear los equilibrios de fuerzas y de momentos de la sección.

Sea una sección sometida a un sistema de cargas contenidas en un mismo plano, tal que producen un momento flector que plastifica la sección.



Figura 12.8 Diagrama de distribución de tensiones en una sección asimétrica totalmente plastificada

En la Figura 12.8 se muestra la distribución de tensiones correspondientes y la posición del eje neutro. Planteando el equilibrio de fuerzas (las resultantes de la distribución de tensiones propuesta), se ha de verificar

$$F_c = F_t \tag{12.15}$$

es decir,

$$\sigma_e S_c = \sigma_e S_t \tag{12.16}$$

siendo F_c , F_t , S_c y S_t las resultantes y las áreas de las zonas comprimida y traccionada, respectivamente. De (12.16) se deduce que las áreas de las zonas comprimida y traccionada son iguales en una sección totalmente plastificada sometida a flexión pura y, obviamente, dichas áreas coinciden con la mitad del área S de la sección.

Flexión plástica

$$S_c = S_t = \frac{S}{2} \tag{12.17}$$

La conclusión expresada en (12.17) implica que el eje neutro, en secciones asimétricas totalmente plastificadas, no pasa por el centro de gravedad de la sección.

Planteando el equilibrio de momentos respecto al eje que resulta de la intersección del plano de cargas con la sección, *eje del plano de cargas*, se obtiene

$$\int_{S_t} \sigma_e y \,\mathrm{d}S - \int_{S_c} \sigma_e y \,\mathrm{d}S = 0 \tag{12.18}$$

Al ser las áreas comprimida y traccionada iguales

$$\int_{S_t} y \,\mathrm{d}S = \int_{S_c} y \,\mathrm{d}S \tag{12.19}$$

siendo las integrales los momentos estáticos de las zonas traccionada y comprimida respecto al eje del plano de cargas con la sección. Por tanto, se concluye que el eje neutro en una sección totalmente plastificada divide a la sección en dos zonas cuyos momentos estáticos respecto al eje del plano de cargas son iguales.

Al ser iguales las áreas traccionada y comprimida, los centros de gravedad de ambas zonas se encuentran sobre una misma recta que además es paralela al eje del plano de cargas, como muestra la Figura 12.8. Por consiguiente, si el eje del plano de cargas es de simetría, el eje neutro de la sección totalmente plastificada será perpendicular al eje del plano de cargas.

En la Figura 12.9 se muestra la misma sección, divida en dos áreas iguales pero diferentes a las realizadas en (12.8). Se comprueba que los centros de gravedad de estas áreas no coinciden sobre una misma línea, paralela al eje del plano de cargas, por lo que no se verifica la ecuación (12.19) y el eje neutro mostrado no es posible.



Figura 12.9 Eje neutro no posible en sección asimétrica totalmente plastificada

12.2.5 Diagrama momento-curvatura

El diagrama momento-curvatura de una sección describe el comportamiento resistente de la misma.

Al actuar un momento sobre una rebanada diferencial, esta se curva manteniéndose las caras de la misma planas y por tanto, existiendo una distribución también plana de deformaciones. Al ir aumentando el momento, se va incrementando la curvatura de la sección. El diagrama momento-curvatura se obtiene representando en un diagrama de abscisa la curvatura y de ordenada el momento, la curvatura obtenida para distintos valores del momento actuante en la sección. Dicho diagrama tiene una parte lineal, de ecuación $\chi = \frac{M}{EI}$. Sigue una parte no lineal, y finalmente el diagrama acaba en M_p con una curvatura infinita (rama asintótica de la gráfica de la Figura 12.10). La curvatura en la parte no lineal se puede obtener mediante la expresión $\chi = \frac{\sigma_e}{z_e E}$. Siendo z_e la profundidad de la zona elástica comprimida.



Figura 12.10 Diagrama momento-curvatura

12.3 Plastificación de la sección en flexión compuesta

Se distinguirán dos casos:

- 1. Plastificación parcial de la sección
- 2. Plastificación total de la sección

12.3.1 Plastificación de la sección en flexión compuesta: Plastificación parcial

Se trata de obtener la distribución de tensiones y la curvatura en una sección solicitada a flexión compuesta (se entiende que el axil es de compresión), sin que la sección se agote (plastifique totalmente). En la Figura 12.11 se muestran la dos posibilidades:

- Solo una cabeza de la sección ha plastificado, como se muestra en la Figura 12.11 a). Las incógnitas son z_e y σ_1 .
- Las dos cabezas de la sección han plastificado, como se muestra en la Figura 12.11 b). Las incógnitas son z_1 y z_2 .

Para el primer caso, alcanzará antes la plastificación aquella cabeza que según las ecuaciones clásicas de la resistencia de materiales esté más tensionada. Las deformaciones en la sección se obtienen teniendo en cuenta que la inclinación del diagrama de tensiones en la parte elástica es $E \chi$ y que $\varepsilon(z) = \chi z$.

Dependiendo de la complicación de la sección, para determinar la distribución de tensiones puede ser necesario recurrir a métodos iterativos. Se parte de una distribución que se va corrigiendo hasta conseguir que los valores de N_i y M_i de la

Flexión plástica

i-ésima iteración coincidan con los $N \ge M$ que solicitan a la sección. Hay que tener en cuenta a la hora de establecer los incrementos para iterar, que un incremento en la curvatura produce un aumento en el momento, y que un desplazamiento del eje neutro hacia la zona de tracción, produce un aumento del axil.



Figura 12.11 Sección sometida a flexión compuesta según el eje y. Plastificación parcial

12.3.2 Plastificación de la sección en flexión compuesta: Plastificación total

Se trata de obtener las parejas de valores M'_p y N'_P que agotan la sección dando lugar a una distribución de tensiones como la mostrada en la Figura 12.12.



Figura 12.12 Sección sometida a flexión compuesta según el ej
ey. Plastificación total

Con las distintas parejas de valores M'_p y N'_p que agotan la sección, se construye el diagrama de interacción de la sección, que se muestra en la Figura 12.13 a). Este se genera determinando para distintos valores de profundidad del eje neutro (z_i) ,

los valores de M'_{p_i} y N'_{p_i} que agotan la sección. Estos valores se representan en un sistema de ejes, de abscisas N'_p y ordenadas M'_p .



Figura 12.13 a) Diagrama de interacción b) Obtención de la carga de agotamiento de una sección a partir del diagrama de interacción

En la Figura 12.13 a) se han representado sendos diagramas de interacción correspondientes a una sección bisimétrica y a una sección no bisimétrica. En secciones bisimétricas el valor máximo de M'_p coincide con M_p . En secciones no bisimétricas, el valor máximo de M'_p es superior al momento plástico de la sección, M_p .

A partir del diagrama de interacción es posible obtener la carga de agotamiento para una sección. Para ello se traza la recta que pasa por el origen y tiene de pendiente $\frac{M}{N}$ (siendo M y N las solicitaciones sobre la sección). La intersección de dicha recta con el diagrama de interacción da el valor de los esfuerzos críticos, tal y como se muestra en la Figura 12.13 b).

12.4 Plastificación en secciones sometidas a flexión simple

Sobre una sección sometida a flexión simple actúan las tensiones normales que produce el momento flector y las tangenciales que produce el esfuerzo cortante. Por tanto, para estudiar la plastificación de la sección es necesario tener en cuenta ambos estados tensionales para determinar un estado tensional único que permita determinar si existe plastificación en la sección. Esto implica utilizar algún criterio de plastificación.

Tresca estableció en 1872 que la plastificación en un punto de un elemento estructural se produce cuando la tensión tangencial máxima en dicho punto alcanza un valor igual al que se produce cuando se alcanza el valor de la tensión del límite elástico en el ensayo de tracción del material, $\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_e}{2}$ como se muestra en la Figura 12.14 a). El criterio de Tresca para un estado de tensiones no principal, según se deduce de la Figura 12.14 b), es

$$\tau_{\text{máx}} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{\sigma_e}{2} \tag{12.20}$$

Si se aplica el criterio de Von Mises, la plastificación de la sección se produce cuando la tensión equivalente de Von Mises, σ_{vm} , alcanza el valor del límite elástico σ_e .

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xz}^2} = \sigma_e \tag{12.21}$$

(c) 2011 Santiago Torrano & D. Herrero Pérez



Figura 12.14 a) Círculo de Mohr para el ensayo de tracción. b) Círculo de Mohr para un estado tensional no principal

En el caso en que solo existe tensión normal, la plastificación, para cualquiera de los dos criterios anteriores, se produce cuando la tensión normal alcanza el límite elástico. Si solo existe tensión tangencial, según el criterio de Tresca, la plastificación se produce cuando

$$\tau_{xz} = \frac{\sigma_e}{2} \tag{12.22}$$

mientras que el criterio de Von Mises establece que la plastificación se produce cuando

$$\tau_{xz} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} \tag{12.23}$$

En el proceso de plastificación de la sección, cuando las fibras extremas alcanzan el límite elástico y plastifican, todas estas fibras están trabajando a la misma tensión a ambos lados de la sección (rebanada diferencial), como se muestra en la Figura 12.15 a) y en la Figura 12.15 b).



Figura 12.15 Rebanada diferencial de un elemento estructural trabajando a flexión simple. Plastificación parcial

Por tanto, la resultantes de fuerzas a un lado y otro de la sección son iguales, por lo que no aparecen tensiones tangenciales para equilibrarlas ($\tau_{zx} = 0$). Así pues, en plasticidad las tensiones tangenciales se reparten de acuerdo a lo establecido en el apartado 10.2, pero solo sobre la parte de la sección que trabaja en régimen elástico tras aplicar el momento flector M. Es decir, las fibras plastificadas por la flexión no sufren tensión tangencial alguna.

12.5 Formación de rótulas plásticas

Sea el pórtico biarticulado e hiperestático de la Figura 12.16 sometido a una carga puntual P en el dintel.



Figura 12.16 Pórtico biarticulado sometido a carga puntual en el dintel

En la Figura 12.17 se muestra la ley de momentos flectores.



Figura 12.17 Pórtico biarticulado sometido a carga puntual en el dintel. Diagrama de momentos flectores

El momento máximo (M_C) se produce en la sección C donde actúa la carga P. En los nudos B y D, los momentos son iguales $(M_B = M_D)$, aunque se siguen nombrando con el subíndice indicando la sección donde actúan. Si M_C es inferior al momento que agota la sección en régimen elástico (M_e) la distribución de deformaciones y de tensiones en la sección en estudio es la mostrada en la Figura 12.17.

Al incrementar el valor de P hasta que la sección C se agote en régimen elástico, la ley de momentos flectores y la distribución de tensiones en la sección C son las mostradas en la Figura 12.18.

Si se sigue incrementando P, comenzará la plastificación de la sección C, llegando un momento en que toda la sección plastificará; se ha alcanzado la deformación en rotura de la fibra más deformada, formándose una rótula plástica. En este momento,



Figura 12.18 Pórtico biarticulado sometido a carga puntual en el dintel. Diagrama de momentos flectores y distribución de tensiones en la sección C al alcanzarse σ_e en dicha sección

la estructura inicialmente hiperestática, ha pasado a ser isostática, como se muestra en la Figura 12.19.



Figura 12.19 Formación de una rótula plástica en la sección C

Simultáneamente, en las secciones $B \ge D$ también aumenta el momento llegando estas a agotarse elásticamente. Al seguir incrementando el valor de P, seguirá aumentando el momento flector en $B \ge D$. En la sección C el momento plástico que agotó la sección se mantiene constante, como muestra la Figura 12.20.



Figura 12.20 Pórtico biarticulado sometido a carga puntual en el dintel. Redistribución de momentos en $B \ge D$

Habrá un valor de P para el que las secciones extremas B y D se agotan, formándose sendas rótulas plásticas, que provocan el colapso de la estructura al transformarse esta en un mecanismo, como muestra la Figura 12.21.



Figura 12.21 Colapso de la estructura por transformación en mecanismo por la formación de rótulas plásticas

12.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio 12.1

Para la sección que se muestra en la Figura 12.22

Obtener:

- 1. Las propiedades estáticas de la sección: área S e inercias principales $I_{y_G},\,I_{z_G}$
- 2. Para el eje y:
 - a) El momento elástico
 - b) El momento plástico

c) El factor de forma



Figura 12.22 Sección en T invertida. Flexión plástica

Datos:

$$\begin{array}{rcl} h & = & b = 100 \mbox{ mm }, \ e_{alma} = e_{ala} = 10 \mbox{ mm } \\ \sigma_e & = & 260 \mbox{ MPa} \end{array}$$

Solución:

1. Las propiedades estáticas de la sección: área S e inercias principales I_{y_G}, I_{z_G}

$$\begin{split} S &= 1900 \cdot 10^3 \ \mathrm{mm}^2 \\ I_{y_G} &= 1800,044 \cdot 10^3 \ \mathrm{mm}^4 \\ I_{z_G} &= 840,833 \cdot 10^3 \ \mathrm{mm}^4 \end{split}$$

2. Para el eje y:

a) El momento e	elástico:	$M_e = 3$	5,562	kN∙m
-----------------	-----------	-----------	-------	------

- b) El momento plástico: $M_p = 11,823 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- c) El factor de forma: $\lambda = 1,802$

Ejercicio 12.2

Para la sección en la Figura 12.23

Obtener:

1. El diagrama momento-curvatura, considerando la flexión según el ej
e \boldsymbol{y}



Figura 12.23 Sección rectangular. Flexión plástica

Solución:

1. Obtener el diagrama momento-curvatura, considerando la flexión según el ejey



Figura 12.24 Sección rectangular. Diagrama momento-curvatura

Tabla 12.1 Diagrama momento-curvatura. Valores

z	M	χ
0	$M_e = \frac{bh^2}{2^6}\sigma_e$	$\frac{2\sigma_e}{hE}\sigma_e$
$\frac{h}{8}$	$\frac{13bh^2}{64}\sigma_e$	$\frac{8\sigma_e}{3hE}\sigma_e$
$\frac{\breve{h}}{4}$	$\frac{11bh^2}{48}\sigma_e$	$\frac{4\sigma_e}{LE}\sigma_e$
$\frac{4}{3h}$	$\frac{48}{47bh^2}\sigma_e$	$\frac{hE}{8\sigma_e}\sigma_e$
8_h	$192 \frac{bh^2}{bh^2}$	hE
$\overline{2}$	$M_p \equiv -\frac{1}{4}\sigma_e$	∞

162

Ejercicio 12.3

Para la sección de Figura 12.25 sometida a un cortante $V_z,$ realizada de un material con límite elástico σ_e



Figura 12.25 Sección rectangular sometida a flexión simple. Flexión plástica

Obtener:

1. El momento estáticamente equivalente a la distribución de tensiones en la sección cuando $\tau_{xz_{\rm máx}}$ alcanza la mitad del límite elástico

Solución:

1. El momento estáticamente equivalente a la distribución de tensiones en la sección cuando $\tau_{xz_{\rm máx}}$ alcanza la mitad del límite elástico

$$M = \frac{bh^2}{4}\sigma_e - \frac{3V_z^2}{4b\sigma_e}$$