

Lección 9

Flexión pura y flexión desviada

Contenidos

9.1. Distribución de tensiones normales estáticamente equivalentes a momentos flectores	114
9.2. Flexión pura	115
9.3. Ley de Navier	116
9.4. Flexión desviada	118
9.5. Módulo resistente	119
9.6. Ejercicios propuestos	119

9.1 Distribución de tensiones normales estáticamente equivalentes a momentos flectores

Una barra trabaja a flexión cuando está sometida a un estado de cargas tal que al deformarse origina tensiones estáticamente equivalentes en cada sección a un momento flector. Haciendo nulo el término correspondiente a las tensiones debidas al axil en la ecuación (7.10) (primer término del miembro derecho de la ecuación), la distribución de tensiones es

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{I_z z - I_{yz} y}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_y(x) + \frac{I_y y - I_{yz} z}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_z(x) \quad (9.1)$$

De la ecuación anterior se deduce que para este tipo de sollicitación el eje neutro siempre corta a la sección y pasa por el centro de gravedad de la misma.

Las tensiones normales debidas a momentos flectores exclusivamente, solo pueden existir en secciones de tramos de barras prismáticas sometidas a momentos flectores constantes; en caso contrario, los esfuerzos cortantes no serían nulos de acuerdo con las ecuaciones de equilibrio

$$\frac{dM_y(x)}{dx} - V_z(x) = 0 \quad \frac{dM_z(x)}{dx} + V_y(x) = 0,$$

deducidas en el Tema 6 (en las cuales se han despreciado los momentos repartidos uniformemente).

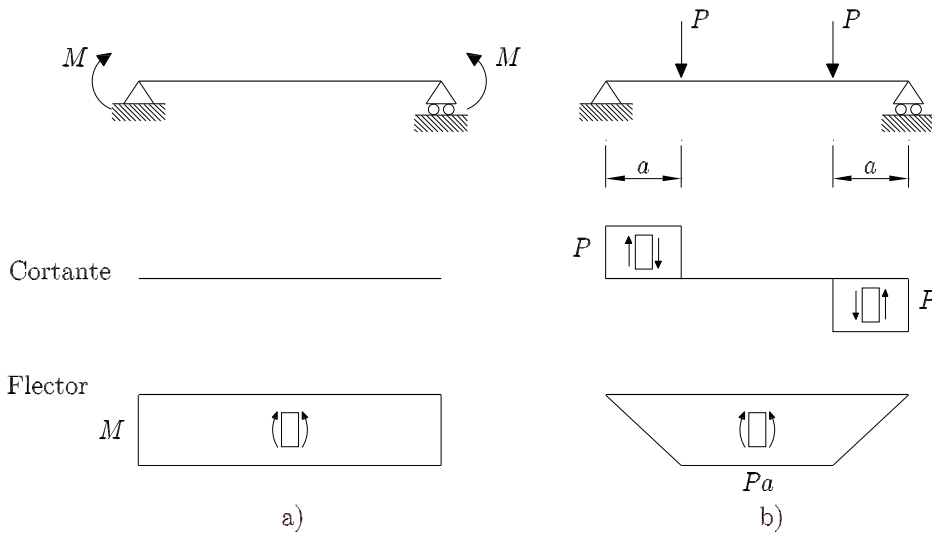


Figura 9.1 a) Viga sometida a tensiones normales, debidas exclusivamente a flexión, en todas sus secciones. b) Viga sometida a tensiones normales, debidas exclusivamente a flexión, en su tramo central

La viga de la Figura 9.1 a) está sometida exclusivamente a flexión en toda su longitud; sin embargo, la viga de la Figura 9.1 b) solo está sometida exclusivamente a flexión en el tramo comprendido entre las dos cargas, ya que en los otros dos tramos existe esfuerzo cortante.

9.2 Flexión pura

Si el momento flector es uniaxial se dice que la flexión es pura. Las distribuciones de tensiones normales para el momento actuando según el eje y o el eje z son, respectivamente

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{I_z z - I_{yz} y}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_y(x) \quad (9.2)$$

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{I_y y - I_{yz} z}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_z(x) \quad (9.3)$$

Si los ejes de referencia son principales de inercia, $I_{yz} = 0$, y las expresiones (9.2) y (9.3), se transforman en

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z \quad (9.4)$$

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{M_z(x)}{I_z} y \quad (9.5)$$

En la Figura 9.2 a) y en la Figura 9.2 b) se representan las distribuciones de tensiones normales para los casos de flexión pura según los ejes y y z , respectivamente.

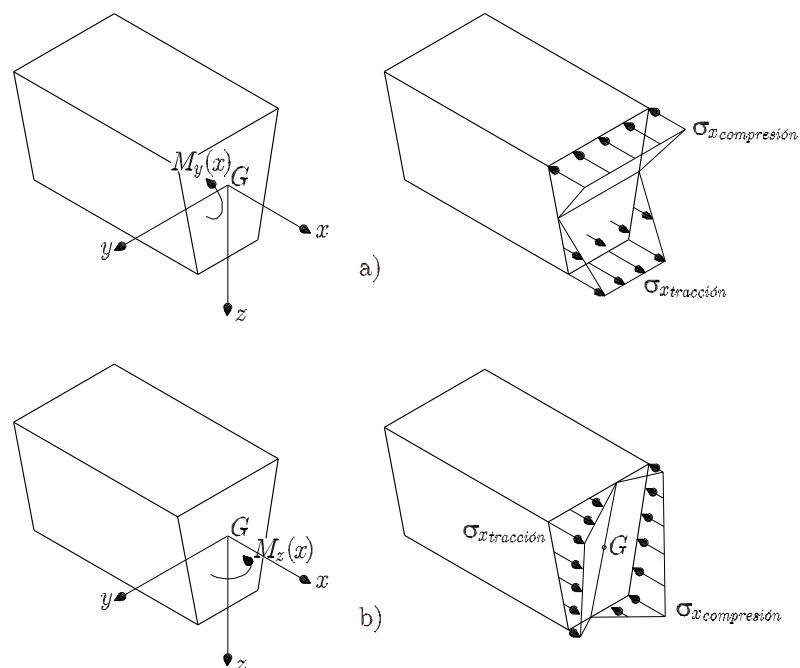


Figura 9.2 Solicitación y distribución de tensiones debidas a flexión pura según los eje y (a) y z (b)

9.3 Ley de Navier

Sea una barra prismática con sección transversal simétrica sometida a dos momentos iguales y de signo contrario en sus extremos, considerándose que actúan solamente en el plano de simetría (XZ), tal como se muestra en la Figura 9.3.

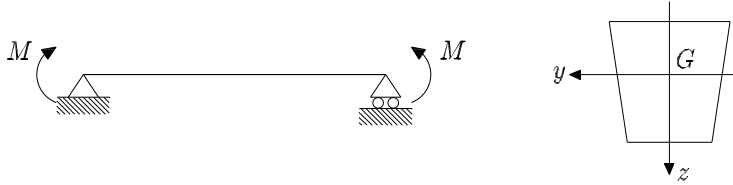


Figura 9.3 Barra prismática sometida a flexión pura de sección transversal simétrica

Se considerarán dos hipótesis de partida:

- Linealidad entre tensiones y deformaciones (ley de Hooke)
- Las secciones rectas y planas antes de la deformación, siguen siendo rectas y planas después de la deformación (hipótesis de Euler-Bernoulli)

Debido a la acción de los momentos flectores la viga flexa en el plano XZ . Las secciones transversales permanecen rectas y planas aunque giran respecto de sí mismas. Las fibras de la cara inferior de la barra se alargan (se traccionan) y las de la cara superior se acortan (se comprimen). La superficie comprendida entre las dos superficies extremas, cuyas fibras ni se alargan ni se acortan, se denomina *superficie neutra*. La Figura 9.4 a) muestra gráficamente la *superficie neutra* de una barra sometida a flexión pura.

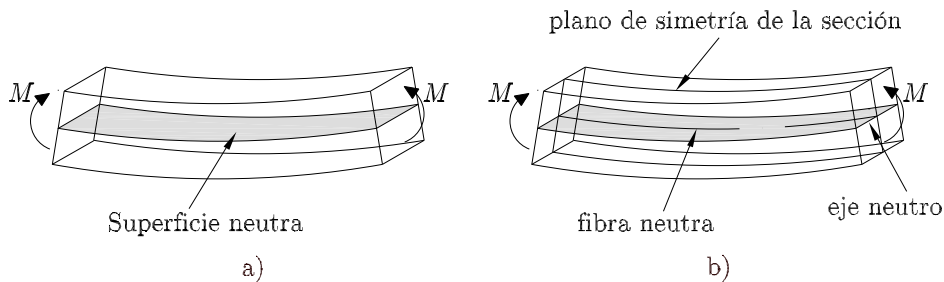


Figura 9.4 a) Definición de superficie neutra. b) Definición de fibra neutra y eje neutro

La intersección de dicha superficie con el plano de simetría de la barra se denomina *fibra neutra*. La intersección de la superficie neutra con cualquier sección transversal se denomina *eje neutro*. La Figura 9.4 b) muestra gráficamente la *fibra neutra* y el *eje neutro* de una barra sometida a acciones exteriores.

Se estudiará una rebanada $nmpq$ de la barra, de longitud dx . La fibra neutra se representa por la línea AB que se muestra en la Figura 9.5 a). Las secciones transversales nm y pq permanecen rectas y planas, tal como se muestra en la Figura 9.5 b).

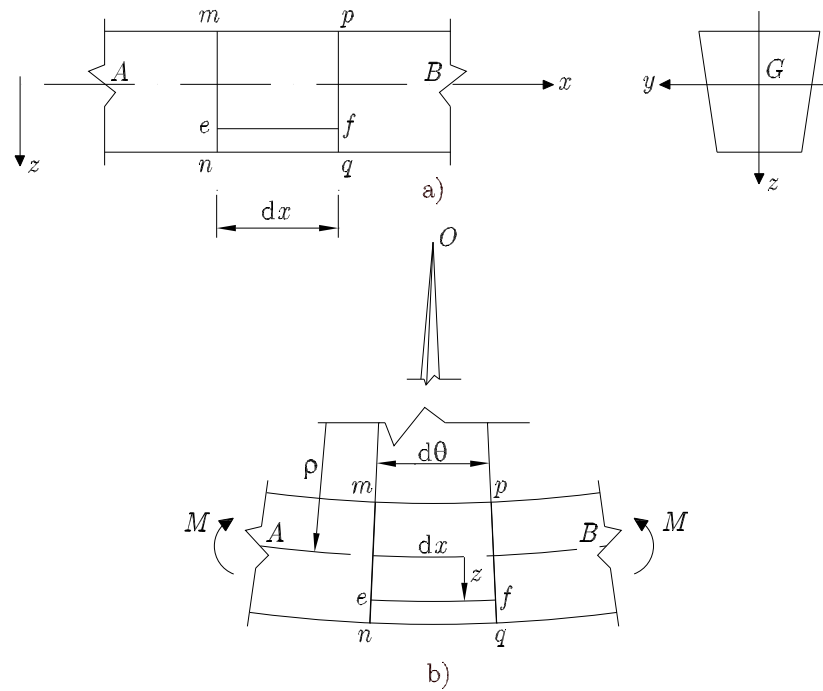


Figura 9.5 Rebanada de una barra prismática sometida a flexión pura. a) Sin deformar. b) Deformada

Las trazas de los planos que contienen las secciones transversales mn y pq en la barra deformada forman un ángulo $d\theta$ y se cortan en el punto O , que es el centro de curvatura de las fibras de la rebanada. El radio de curvatura ρ (referido a la fibra neutra) permanece constante durante la deformación. Además, la distancia dx entre las dos secciones mn y pq permanece invariable en la fibra neutra, verificándose

$$dx = \rho d\theta \tag{9.6}$$

El resto de las fibras longitudinales comprendidas entre los dos planos tendrán deformaciones lineales al alargarse o acortarse.

La fibra ef , antes de la deformación, tiene una longitud dx . Tras la deformación, que se muestra en la Figura 9.5 b), su longitud es

$$ef = (\rho + z) d\theta = (\rho + z) \frac{dx}{\rho} = dx + \frac{z}{\rho} dx \tag{9.7}$$

y su deformación longitudinal unitaria

$$\varepsilon_{ef} = \frac{dx + \frac{z}{\rho} dx - dx}{dx} = \frac{z}{\rho} \tag{9.8}$$

De acuerdo con la ley de Hooke, dicha deformación se puede expresar en función de la tensión sobre la fibra y del módulo de elasticidad longitudinal como:

$$\varepsilon_{ef} = \frac{\sigma_x(x, y, z)}{E} \tag{9.9}$$

Igualando las expresiones (9.8) y (9.9) se obtiene la Ley de Navier:

$$\frac{\sigma_x(x, y, z)}{E} = \frac{z}{\rho} \Rightarrow \sigma_x(x, y, z) = \frac{E}{\rho} z \quad (9.10)$$

En una sección sometida a flexión pura, los módulos de las tensiones actuantes sobre las distintas fibras son directamente proporcionales a sus distancias al eje neutro.

Teniendo en cuenta (9.4) y (9.5), la ley de Navier puede expresarse como

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y(x)}{EI_y} \quad (9.11)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z(x)}{EI_z} \quad (9.12)$$

dependiendo de si el momento actúa según el eje y o el z .

9.4 Flexión desviada

Si el momento flector se puede descomponer en las direcciones de los ejes y y z , la sección está sometida a flexión desviada. La expresión de la distribución de tensiones normales es la vista en (9.1)

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{I_z z - I_{yz} y}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_y(x) + \frac{I_y y - I_{yz} z}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_z(x)$$

La Figura 9.6 muestra la distribución de tensiones normales en una sección sometida a flexión desviada.

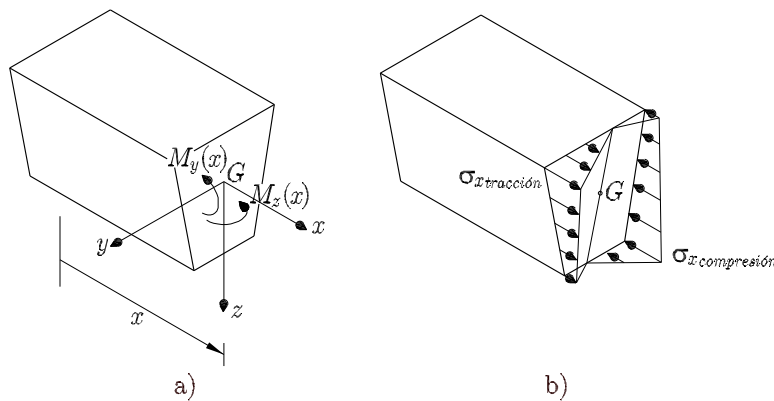


Figura 9.6 a) Solicitación de flexión desviada. b) Distribución de tensiones debidas a la flexión desviada

Si los ejes son principales de inercia

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z + \frac{M_z(x)}{I_z} y \quad (9.13)$$

9.5 Módulo resistente

Para una sección cualquiera, sometida a la acción de un momento flector M aplicado en su centro de gravedad, se define el módulo resistente W_P , asociado a un punto P de la sección, como el cociente entre el momento de inercia de la sección respecto al eje neutro (I_{en}) y la mínima distancia (h) del punto P a dicho eje, tal como se muestra en la Figura 9.7 a).

$$W_P = \frac{I_{en}}{h} \quad (9.14)$$

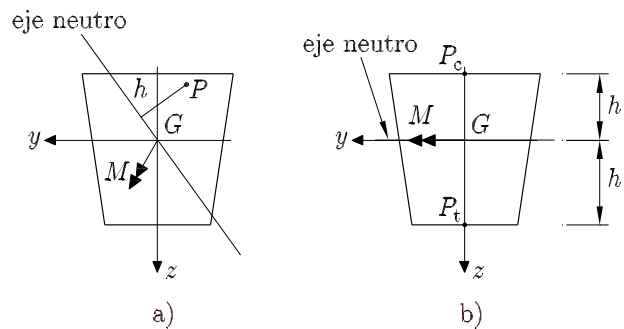


Figura 9.7 Concepto de módulo resistente

Si el momento flector actúa en la dirección de uno de los ejes de la sección, como se muestra en la Figura 9.5 b), las ecuaciones (9.4) y (9.5) se pueden reescribir en función de los módulos resistentes de los puntos más y menos traccionados, como

$$\sigma_{x_{\text{tracción}}} = \frac{M}{W_{p_t}} = \frac{M}{\frac{I_{en}}{h_t}} \quad \sigma_{x_{\text{compresión}}} = \frac{M}{W_{p_c}} = \frac{M}{\frac{I_{en}}{h_c}} \quad (9.15)$$

De las expresiones anteriores se deduce que aquellos puntos de la sección con menor módulo resistente asociado (los más alejados del eje neutro) serán los que estarán sometidos a mayor tensión normal.

9.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio 9.1

La sección transversal de la viga en doble T que se muestra en la Figura 9.8, está sometida a un momento flector M_y de 90 kN·m.

Obtener:

1. Las propiedades estáticas de la sección: área S e inercias principales I_{y_G} , I_{z_G}
2. La expresión analítica de la distribución de tensiones normales
3. La ecuación del eje neutro
4. La representación gráfica del eje neutro y de la distribución de tensiones normales

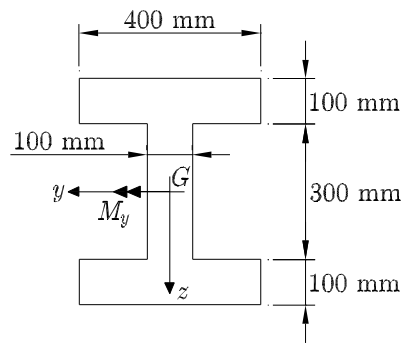


Figura 9.8 Sección llena en doble T sometida a flexión pura

Solución:

1. Las propiedades estáticas de la sección: área S e inercias principales I_{y_G} , I_{z_G}

$$S = 110 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$I_{y_G} = 3491,67 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_G} = 1091,67 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

2. La expresión analítica de la distribución de tensiones normales

$$\sigma_x(y, z) = 0,0258z \quad (\text{Fuerzas en N y longitudes en mm})$$

3. La ecuación del eje neutro

$$z = 0$$

4. La representación gráfica del eje neutro y de la distribución de tensiones normales

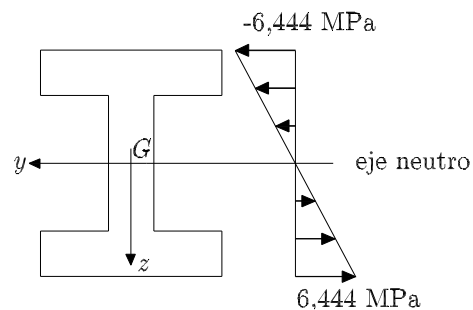


Figura 9.9 Sección llena en doble T sometida a flexión pura. Distribución de tensiones normales

Ejercicio 9.2

La sección transversal de una viga en T está sometida a un momento flector según se muestra la Figura 9.10.

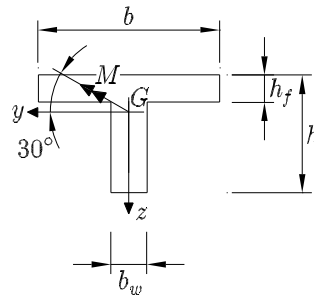


Figura 9.10 Sección llena en T sometida a flexión desviada

Obtener:

1. Las propiedades estáticas de la sección: área S e inercias principales I_{y_G} , I_{z_G}
2. La expresión analítica de la distribución de tensiones normales
3. La ecuación del eje neutro
4. La representación gráfica del eje neutro y de la distribución de tensiones normales

Datos:

$$h = 130 \text{ mm} , b = 200 \text{ mm} , h_f = 30 \text{ mm} , b_w = 40 \text{ mm}$$

$$M = 15 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Solución:

1. Las propiedades estáticas de la sección: área S e inercias principales I_{y_G} , I_{z_G}

$$S = 100 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

$$I_{y_G} = 1392,3 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_G} = 2053,3 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

2. La expresión analítica de la distribución de tensiones normales

$$\sigma_x(y, z) = 0,365y + 0,934z \quad (\text{Fuerzas en N y longitudes en mm})$$

3. La ecuación del eje neutro

$$y = -2,559z$$

4. La representación gráfica del eje neutro y de la distribución de tensiones normales

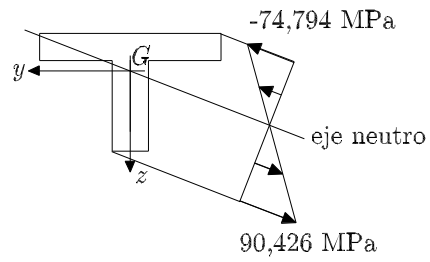


Figura 9.11 Sección llena en T sometida a flexión desviada. Distribución de tensiones normales