

Lección 8

El esfuerzo axial

Contenidos

8.1. Distribución de tensiones normales estáticamente equivalentes a esfuerzos axiales	104
8.2. Deformaciones elásticas y desplazamientos debidos a un axial centrado	105
8.3. Sistemas hiperestáticos sometidos a esfuerzo axial	107
8.4. Cargas térmicas y faltas de ajuste	109
8.4.1. Cargas térmicas	109
8.4.2. Falta de ajuste	109
8.5. Ejercicios propuestos	110

8.1 Distribución de tensiones normales estáticamente equivalentes a esfuerzos axiales

Una barra prismática trabaja a esfuerzo axial, de tracción o compresión, cuando al deformarse desarrolla en cada sección normal a la directriz de la barra (sección recta), tensiones estáticamente equivalentes a un esfuerzo axial. Esto implica que los esfuerzos cortantes y los momentos flectores y torsor son nulos. Por tanto, la distribución de tensiones normales, dada por (7.11), queda como

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{S} \quad (8.1)$$

En este tipo de sollicitación el eje neutro nunca corta a la sección. Se ha comprobado experimentalmente que en una barra sometida exclusivamente a esfuerzo axial, cualquier sección transversal recta y plana, sigue siendo recta y plana tras la deformación. Es decir, todos los puntos de una sección tienen la misma deformación. Si la sección es homogénea, la distribución de tensiones es uniforme en toda la sección. El tensor de tensiones en cualquier punto de la sección, es

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

En la Figura 8.1 se representa la distribución de tensiones correspondiente.

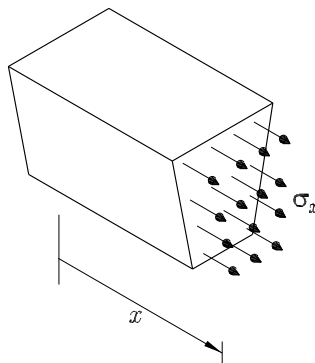


Figura 8.1 Distribución uniforme de tensiones en una sección sometida exclusivamente a esfuerzo axial

En una barra con sección transversal constante sometida a un esfuerzo axial constante, todos y cada uno de los puntos de cualquier sección transversal de la barra, y todas y cada una de las secciones (por tanto todos los puntos de la barra) tendrán la misma tensión. Si la sección y/o el esfuerzo axial no son constantes, la distribución de tensiones será uniforme en cada sección, pero variará su valor de una sección a otra. Un ejemplo sería un cable colgado que resiste la acción de su propio peso.

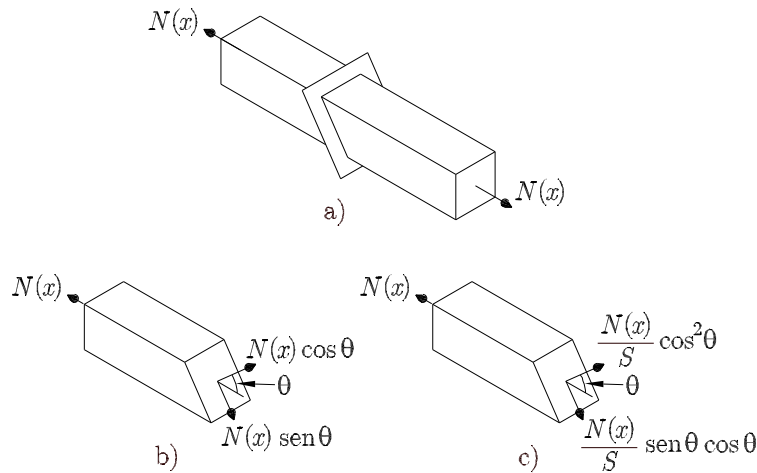


Figura 8.2 Esfuerzos y tensiones en una sección inclinada respecto a la directriz, de una barra sometida exclusivamente a esfuerzo axial

El estado tensional en cualquier punto de una sección que no sea recta, como la que se muestra en la Figura 8.2 a), se obtiene descomponiendo la fuerza axial actuante en una componente normal y otra tangencial al plano considerado, como se muestra en la Figura 8.2 b). Las tensiones correspondientes se obtienen al dividir dichas componentes por el área S de la sección inclinada, tal y como se muestra en la Figura 8.2 c).

En la Figura 8.3 se muestra el círculo de Mohr que representa un estado tensional de tracción uniaxial. Se comprueba que dependiendo del plano considerado, pueden existir tensiones tangenciales. La máxima tensión tangencial ($\tau_{\text{máx}}$ en la figura) corresponde al plano que forma 45° con la directriz de la pieza.

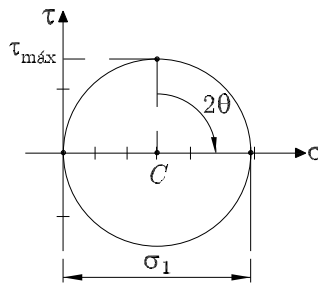


Figura 8.3 Círculo de Mohr para un estado de tracción uniaxial

8.2 Deformaciones elásticas y desplazamientos debidos a un axil centrado

Para el estudio de las deformaciones en una barra prismática cargada axialmente se hará uso de la ley de Hooke generalizada.

Si la sección está sometida exclusivamente a un esfuerzo axial en dirección del eje x , se verifica que $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Las ecuaciones de la ley de Hooke

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}\end{aligned}$$

se reducen a

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (8.3)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \quad (8.4)$$

Es decir, además de la deformación longitudinal unitaria en la dirección de aplicación de la carga, ecuación (8.3), se producen deformaciones transversales, ecuación(8.4). Teniendo en cuenta que la distribución de tensiones normales en una sección sometida exclusivamente a esfuerzo axil es

$$\sigma_x = \frac{N}{S} \quad (8.5)$$

sustituyendo (8.5) en (8.3), el alargamiento unitario en la dirección de aplicación de la carga es

$$\varepsilon_x = \frac{N}{ES} \quad (8.6)$$

El alargamiento unitario expresado como una variación del alargamiento longitudinal es

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (8.7)$$

Igualando (8.6) y (8.7), se obtiene

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{ES} \quad (8.8)$$

El desplazamiento u de una sección de abscisa x , según se muestra en la Figura 8.4, se obtiene a partir de la integración de la ecuación (8.8):

$$u = \int_0^x \frac{N}{ES} dx \quad (8.9)$$

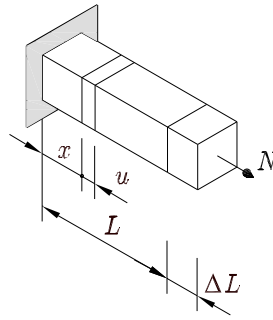


Figura 8.4 Alargamiento de una barra sometida exclusivamente a esfuerzo axial

El incremento de longitud de la barra se obtiene a partir de la ecuación (8.9):

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N}{ES} dx = \frac{NL}{ES} \quad (8.10)$$

La expresión (8.10) es válida en el caso de área y carga constantes. Si la barra está sometida a fuerzas axiales diferentes en varias secciones, o si la sección transversal o el módulo de elasticidad cambian a lo largo de la barra, la ecuación (8.10) se aplica a cada uno de los n tramos de la barra donde las magnitudes señaladas anteriormente sean constantes. El incremento de longitud de la barra se obtiene mediante la suma del desplazamiento de cada tramo.

$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \frac{N_i L_i}{E_i S_i} \quad (8.11)$$

8.3 Sistemas hiperestáticos sometidos a esfuerzo axial

La forma de abordar este tipo de problemas hiperestáticos es planteando las ecuaciones de equilibrio y tantas ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos como grado de hiperestaticidad de la estructura.

La barra de la Figura 8.5 a), de un material de módulo de elasticidad longitudinal E , está constituida por dos tramos de igual longitud, con secciones transversales circulares de diámetros diferentes. Está empotrada en ambos extremos. En el centro de gravedad de la sección común a ambos tramos actúa una carga axial P .

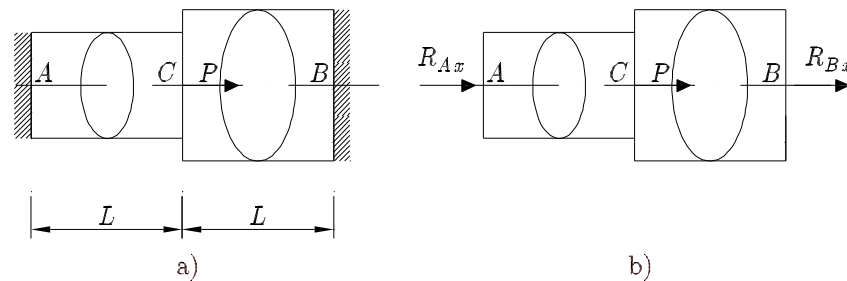


Figura 8.5 a) Barra prismática hiperestática sometida a axil. b) Reacciones

En los empotramientos A y B , al estar la barra trabajando únicamente a esfuerzo axial, solo habrá reacciones horizontales, como se muestra en la Figura 8.5 b). La única ecuación de la estática que puede plantearse es

$$\sum F_x = 0, \quad R_{Ax} + P + R_{Bx} = 0 \quad (8.12)$$

Se tienen dos incógnitas (R_{Ax} y R_{Bx}) y una ecuación (8.12); por tanto, el grado de hiperestaticidad es uno. Es necesaria una ecuación adicional. La disposición de los apoyos impide que la longitud de la barra varíe, por lo que puede plantearse como ecuación adicional la ecuación de compatibilidad

$$\Delta L = \Delta L_{AC} + \Delta L_{CB} = 0 \quad (8.13)$$

Para resolver el sistema formado por (8.12) y (8.13) es necesario expresar esta última en función de las incógnitas hiperestáticas. La ecuación

$$\Delta L = \frac{NL}{ES} \quad (8.14)$$

expresa el alargamiento en una barra sometida a esfuerzo axial en función del axial (N), el área (S) y el módulo de elasticidad longitudinal del material (E). En la Figura 8.6 se muestran los sólidos libres de cada uno de los tramos para el cálculo de los esfuerzos axiales.

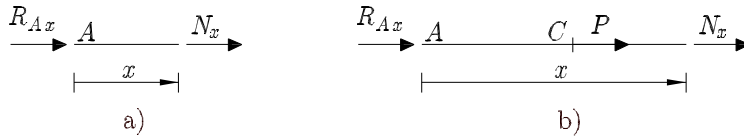


Figura 8.6 a) Sólido libre del tramo AC . b) Sólido libre del tramo CB

Los esfuerzos axiales son

Tramo AC : $0 \leq x \leq L$

$$N_x(x) = -R_{Ax} \quad (8.15)$$

Tramo CB : $L \leq x \leq 2L$

$$N_x(x) = -(R_{Ax} + P) \quad (8.16)$$

Sustituyendo (8.15) y (8.16) en (8.14) y el resultado en (8.13), se obtiene

$$\Delta L = \frac{N_{x_{AC}}L}{ES_{AC}} + \frac{N_{x_{CB}}L}{ES_{CB}} = -\frac{R_{Ax}L}{ES_{AC}} - \frac{(R_{Ax} + P)L}{ES_{CB}} = 0 \quad (8.17)$$

De (8.17) se obtiene R_{Ax} ,

$$R_{Ax} = -\frac{PS_{AC}}{S_{AC} + S_{CB}} \quad (8.18)$$

Sustituyendo (8.18) en (8.12) se obtiene R_{Bx} ,

$$R_{Bx} = -\frac{PS_{CB}}{S_{AC} + S_{CB}} \quad (8.19)$$

Conocidas las reacciones en los apoyos, las leyes de esfuerzos axiales y la variación de longitud de cada tramo se obtienen sustituyendo las reacciones en las ecuaciones (8.14), (8.15) y (8.16).

8.4 Cargas térmicas y faltas de ajuste

Además de las cargas externas, existen otras causas que provocan tensiones y deformaciones en las estructuras. En este apartado se estudian dos de ellas:

- Las cargas térmicas
- La falta de ajuste

8.4.1 Cargas térmicas

Los cambios de temperatura pueden provocar un cambio en las dimensiones de una barra prismática. Un aumento de temperatura provoca una dilatación del material y un descenso de la temperatura, una contracción. Esta dilatación (contracción) está relacionada con el incremento de temperatura a través de la relación lineal

$$\Delta L = \alpha L \Delta T \quad (8.20)$$

siendo α una propiedad del material denominada *coeficiente de dilatación térmica*. Sus unidades se miden en deformación unitaria por grado de temperatura. ΔT es el incremento (decremento) de temperatura que sufre la barra.

Un sólido no sujeto a ligaduras, al aplicarle una carga térmica, se deforma sin que exista tensión en algún punto del mismo. En una estructura isostática tampoco se producen tensiones por la acción de cargas térmicas, aunque sí deformaciones. Finalmente, una estructura hiperestática, puede o no desarrollar tensiones debidas a una carga térmica dependiendo de la geometría de la misma y del tipo de carga térmica.

8.4.2 Falta de ajuste

Si alguna barra de una estructura se construye con una longitud distinta a la especificada, bien intencionadamente o por fallo en su fabricación, al acoplarla a la estructura, la geometría de esta es diferente a la diseñada. Si la estructura es isostática, la falta de ajuste de una o varias barras no causan deformaciones ni tensiones. Si la barra AC de la estructura de la Figura 8.7 a) tiene mayor longitud que la especificada, al montarla, el punto C descenderá de su posición inicial a la C' , pero no se producirá ningún estado tensional en la estructura por esta falta de ajuste. Por el contrario, si la estructura es hiperestática, para el montaje de las barras con falta de ajuste es necesario que se deformen otras barras, lo que origina un estado tensional. Si la barra AD de la estructura de la Figura 8.7 b) tiene mayor longitud que la especificada, para que su montaje sea posible, las barras BD y CD deben alargarse y acortarse, respectivamente, para poder ajustarse con la AD . En el montaje, las tres barras sufrirán deformaciones y en consecuencia estarán tensionadas al pasar el punto D a la posición D' .

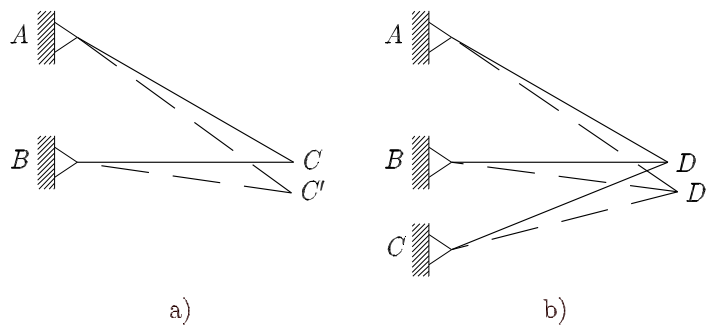


Figura 8.7 a) Estructura isostática con falta de ajuste. b) Estructura hiperestática con falta de ajuste

8.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 8.1

Para la pieza de la Figura 8.8 construida en acero

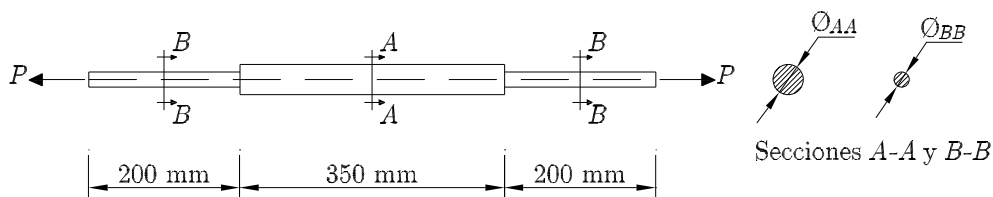


Figura 8.8 Barra cilíndrica escalonada sometida a tracción

Obtener:

1. Las tensiones en cualquier punto de las secciones $A-A$ y $B-B$
2. El alargamiento total experimentado por la barra
3. Los diámetros finales de las secciones transversales $A-A$ y $B-B$

Datos:

$$\begin{aligned}
 P &= 50 \text{ kN} \\
 \varnothing_{AA} &= 40 \text{ mm} , \varnothing_{BB} = 20 \text{ mm} \\
 E &= 200 \text{ GPa} , \nu = 0,3
 \end{aligned}$$

Solución:

1. Las tensiones en cualquier punto de las secciones $A-A$ y $B-B$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{AA} &= 39,789 \text{ MPa} \\
 \sigma_{BB} &= 159,155 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

2. El alargamiento total experimentado por la barra

$$\Delta L = 0,388 \text{ mm}$$

3. Los diámetros finales de las secciones transversales $A-A$ y $B-B$

$$\varnothing_{AA_{\text{final}}} = 39,9976 \text{ mm}$$

$$\varnothing_{BB_{\text{final}}} = 19,9952 \text{ mm}$$

Ejercicio 8.2

En la estructura de la Figura 8.9 todas las barras tienen área A y son de un material de módulo de elasticidad E . La barra horizontal se considera infinitamente rígida.

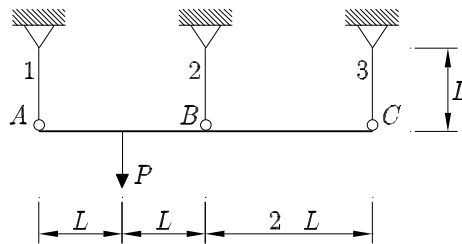


Figura 8.9 Barra cilíndrica escalonada sometida a tracción

Determinar:

1. Los esfuerzos en las barras 1, 2 y 3

Solución:

1. Los esfuerzos en las barras 1, 2 y 3

$$N_1 = \frac{7P}{12}, \quad N_2 = \frac{P}{3}, \quad N_3 = \frac{P}{12}$$

Ejercicio 8.3

El tubo metálico cuadrado de la Figura 8.10, de longitud L , lado a y espesor t , se encuentra empotrado en sus dos extremos, trabajando a una temperatura de T ($^{\circ}\text{C}$). Se admite que a esta temperatura el estado tensional en el tubo es despreciable. Se le aplica un incremento de temperatura ΔT .

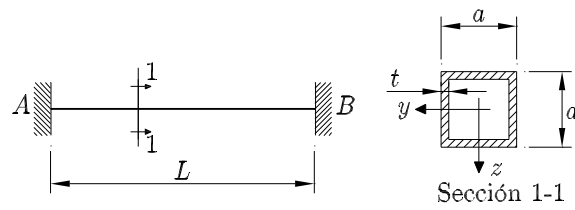


Figura 8.10 Barra cilíndrica escalonada sometida a tracción

Obtener:

1. La distribución de tensiones en cualquier sección transversal de la pieza
2. Las reacciones en los empotramientos

Datos:

$$L = 2 \text{ m} , a = 40 \text{ mm} , t = 2 \text{ mm}$$

$$E = 210 \text{ GPa} , \Delta T = 20^\circ\text{C} , \alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ m/m/}^\circ\text{C}$$

Solución:

1. La distribución de tensiones en cualquier sección transversal de la pieza

$$\sigma_x = 50,4 \text{ MPa}$$

2. Las reacciones en los empotramientos

$$R_{Ax} = R_{Bx} = 15,32 \text{ kN}$$