

Lección 7

Distribución de tensiones normales en régimen elástico - Conceptos fundamentales

Contenidos

7.1. Expresión general de la distribución de tensiones normales	94
7.2. Eje neutro	97
7.3. Representación gráfica plana de la distribución de tensiones normales	97
7.4. Ejercicios propuestos	100

7.1 Expresión general de la distribución de tensiones normales

Sea una sección transversal de una barra prismática sometida a una fuerza N aplicada en su centro de gravedad en sentido positivo del eje x y a sendos momentos flectores según los ejes y y z que se muestran en la Figura 7.1 a). Se considera positivo el momento según el eje y si lleva la dirección del eje, y el momento según el eje z si lleva la dirección contraria al eje, es decir, si ambos momentos producen tracciones en el primer cuadrante. El origen de coordenadas coincide con el centro de gravedad de la sección.

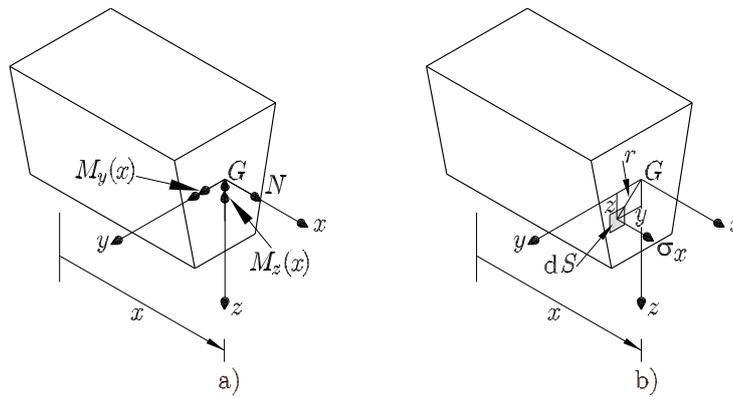


Figura 7.1 a) Sección transversal de una barra prismática sometida a sollicitaciones normales b) Distribución de tensiones normales sobre un elemento diferencial de la sección

Se supondrá que las sollicitaciones sobre la sección producen un estado tensional caracterizado por

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y, z) &\neq 0 \\ \sigma_y(x, y, z) = \sigma_z(x, y, z) &= 0 \\ \tau_{xy}(x, y, z) = \tau_{xz}(x, y, z) = \tau_{yz}(x, y, z) &= 0\end{aligned}$$

Las ecuaciones de equilibrio interno, desarrolladas en el tema 3 apartado 3.5,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0,\end{aligned}$$

se reducen (despreciando las fuerzas de volumen) a $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$; lo que implica que la distribución de tensiones normales en una sección a una distancia x del origen

considerado, es solamente función de y y z . Además, es posible demostrar a través de las *ecuaciones de compatibilidad en tensiones* o *ecuaciones de Beltrami-Michell*, que la distribución de tensiones $\sigma_x(x, y, z)$ debe ser lineal en y y z . Es decir,

$$\sigma_x(x, y, z) = Ay + Bz + C \quad (7.1)$$

Para que el sistema de fuerzas resultante de la distribución de tensiones $\sigma_x(x, y, z)$ y las fuerzas y momentos aplicados sobre la sección sean estáticamente equivalentes, es necesario y suficiente que se verifique la igualdad de resultantes de ambos sistemas y la igualdad de momentos de ambos sistemas respecto al mismo punto.

La igualdad de resultantes de ambos sistemas implica que

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_S \sigma_x(x, y, z) \, dS = \int_S (Ay + Bz + C) \, dS = \\ &= \underbrace{A \int_S y \, dS}_{Q_z} + \underbrace{B \int_S z \, dS}_{Q_y} + \underbrace{C \int_S dS}_S \end{aligned} \quad (7.2)$$

siendo Q_y y Q_z los momentos estáticos de la sección respecto a los ejes y y z , respectivamente, y S el área de la sección.

Al coincidir el origen de coordenadas y el centro de gravedad de la sección, se verifica que $Q_y = Q_z = 0$, por lo que la expresión (7.2) queda reducida a $N(x) = C S$, es decir, la constante C de la ecuación (7.1) es

$$C = \frac{N(x)}{S} \quad (7.3)$$

La igualdad de momentos implica que

$$\begin{aligned} M_y(x) \vec{j} - M_z(x) \vec{k} &= \int_S \vec{r} \times [\sigma_x(x, y, z) \, dS] \vec{i} = \\ &= \int_S \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & y & z \\ \sigma_x(x, y, z) \, dS & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \int_S z \sigma_x(x, y, z) \, dS \vec{j} - \int_S y \sigma_x(x, y, z) \, dS \vec{k} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Identificando componentes se obtiene que

$$M_y(x) = \int_S z \sigma_x(x, y, z) \, dS \quad (7.5)$$

$$M_z(x) = \int_S y \sigma_x(x, y, z) \, dS \quad (7.6)$$

Sustituyendo (7.1) en (7.5) y (7.6)

$$\begin{aligned}
M_y(x) &= \int_S z (Ay + Bz + C) dS = \\
&= \int_S z \left(Ay + Bz + \frac{N(x)}{S} \right) dS = \quad (7.7) \\
&= A \underbrace{\int_S z y dS}_{I_{yz}} + B \underbrace{\int_S z^2 dS}_{I_y} + \frac{N(x)}{S} \underbrace{\int_S z dS}_{Q_y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_z(x) &= \int_S y (Ay + Bz + C) dS = \\
&= \int_S y \left(Ay + Bz + \frac{N(x)}{S} \right) dS = \quad (7.8) \\
&= A \underbrace{\int_S y^2 dS}_{I_z} + B \underbrace{\int_S y z dS}_{I_{yz}} + \frac{N(x)}{S} \underbrace{\int_S y dS}_{Q_z}
\end{aligned}$$

siendo I_y el momento de inercia de la sección respecto al eje y ; I_z el momento de inercia de la sección respecto al eje z e I_{yz} el producto de inercia de la sección respecto a los ejes y y z . Los momentos estáticos Q_y y Q_z son nulos por estar referidos al centro de gravedad de la sección.

Los coeficientes A y B de la ecuación (7.1) se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (7.7) y (7.8)

$$\begin{cases} A I_{yz} + B I_y = M_y(x) \\ A I_z + B I_{yz} = M_z(x) \end{cases} \quad (7.9)$$

obteniéndose

$$A = \frac{M_z(x) I_y - M_y(x) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad y \quad B = \frac{M_y(x) I_z - M_z(x) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

Sustituyendo las expresiones de A , B y C en (7.1), la expresión de la tensión normal es

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{S} + \frac{M_z(x) I_y - M_y(x) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{M_y(x) I_z - M_z(x) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z \quad (7.10)$$

o bien

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{S} + \frac{I_z z - I_{yz} y}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_y(x) + \frac{I_y y - I_{yz} z}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_z(x) \quad (7.11)$$

La formulación anterior (y las que se deriven de esta en los siguientes apartados) es válida tanto para secciones macizas como de pared delgada. Se consideran perfiles de pared delgada aquellos cuya sección transversal tenga espesores de pared (t) que sean como máximo la décima parte de la menor dimensión característica ($h, b > 10t$). El resto son perfiles de sección maciza.

En la Figura 7.2 se muestra la distribución de tensiones normales sobre una sección sometida a esfuerzo axial y momentos flectores según los ejes y y z .

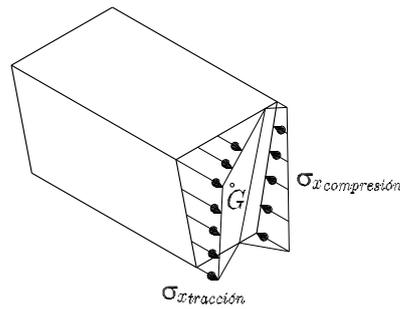


Figura 7.2 Distribución de tensiones normales sobre una sección de una barra prismática sometida a sollicitaciones normales

7.2 Eje neutro

Se define *eje neutro* como *el lugar geométrico de los puntos de la sección con tensión normal nula*. Por tanto, se verifica

$$\frac{N(x)}{S} + \frac{I_z z - I_{yz} y}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_y(x) + \frac{I_y y - I_{yz} z}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_z(x) = 0 \quad (7.12)$$

o si los ejes son principales de inercia ($I_{yz} = 0$),

$$\frac{N(x)}{S} + \frac{M_y(x)}{I_y} z + \frac{M_z(x)}{I_z} y = 0 \quad (7.13)$$

Si el eje neutro corta a la sección, esta la divide en dos zonas, una estará traccionada y la otra comprimida. Si el eje neutro no corta a la sección, toda la sección estará comprimida o traccionada, en función del valor de los esfuerzos que la solicitan.

En la Figura 7.3 se muestra el eje neutro correspondiente a una sección sometida a esfuerzo axial y a momentos flectores según los ejes y y z .

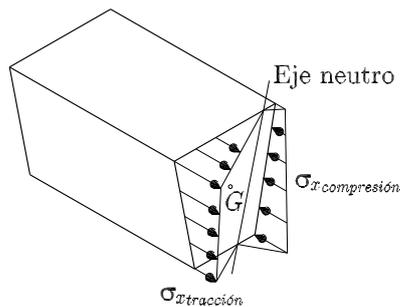


Figura 7.3 Eje neutro correspondiente a una sección sometida a esfuerzo axial y a momentos flectores según los ejes y y z

7.3 Representación gráfica plana de la distribución de tensiones normales

Se suele utilizar una representación plana (sobre el propio plano de la sección) de la distribución de tensiones normales.

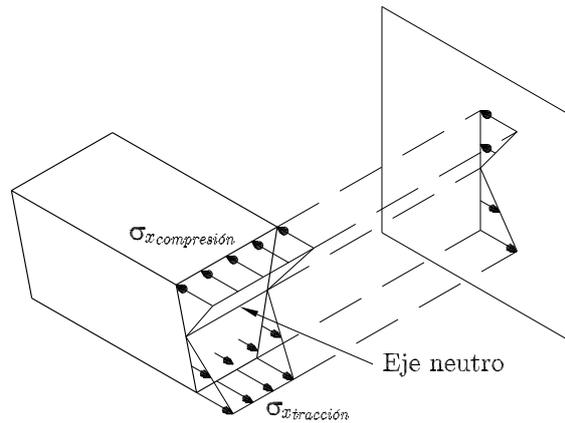


Figura 7.4 Representación plana de la distribución de tensiones normales

En la Figura 7.4 se muestra la proyección de la distribución de tensiones en una sección, sobre un plano perpendicular al eje neutro. Posteriormente, dicho plano se abate sobre el plano de la sección, obteniéndose la representación buscada. El procedimiento de construcción es el que sigue:

1. Se traza el eje neutro sobre la sección, como se muestra en la Figura 7.5

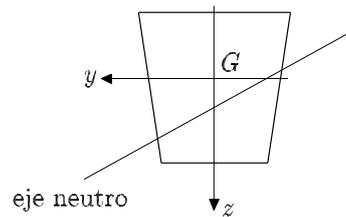


Figura 7.5 Representación plana de la distribución de $\sigma_x(x, y, z)$. Paso 1

2. Se localizan los puntos más y menos traccionados en la sección, es decir, los vértices más alejados del eje neutro a un lado y otro de este, como se muestra en la Figura 7.6

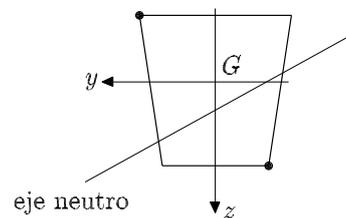


Figura 7.6 Representación plana de la distribución de $\sigma_x(x, y, z)$. Paso 2

3. Por cualquier punto del plano que contiene a la sección, se traza una perpendicular al eje neutro como la que se muestra en la Figura 7.7

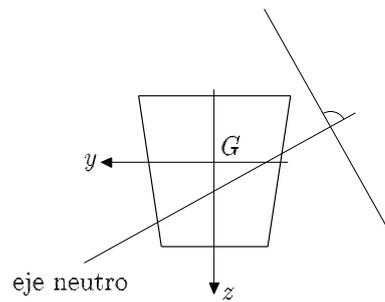


Figura 7.7 Representación plana de la distribución de $\sigma_x(x, y, z)$. Paso 3

4. Se trazan sendas paralelas al eje neutro que pasen por los puntos determinados en el apartado anterior, las cuales deben cortar a la línea perpendicular al eje neutro trazada en el punto 2, como se muestra en la Figura 7.8

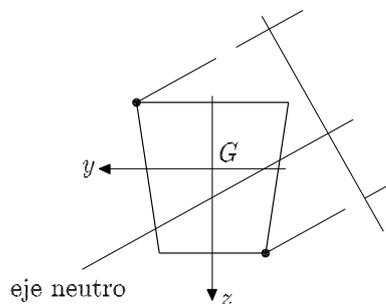


Figura 7.8 Representación plana de la distribución de $\sigma_x(x, y, z)$. Paso 4

5. Se evalúan las tensiones en los puntos más traccionados (menos comprimidos) y menos traccionados (más comprimidos)
6. Con origen en la intersección de las líneas perpendicular y paralelas al eje neutro, se trazan sobre las paralelas sendos segmentos proporcionales a las tensiones obtenidas en el apartado anterior y se unen los extremos, como se muestra en la Figura 7.9

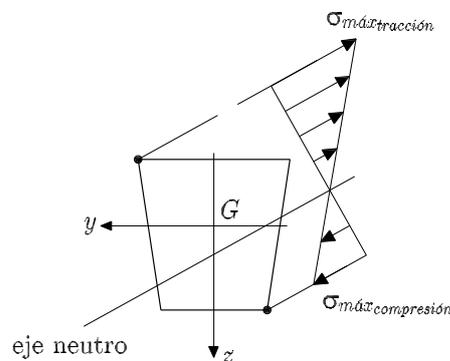


Figura 7.9 Representación plana de la distribución de $\sigma_x(x, y, z)$. Paso 6

7.4 Ejercicios propuestos

Ejercicio 7.1

La expresión analítica de la distribución de tensiones normales de la sección hexagonal mostrada en la Figura 7.10 es:

$$\sigma_x(y, z) = -21,858 + 0,266y - 0,309z \quad (\text{Fuerzas en N y longitudes en mm})$$

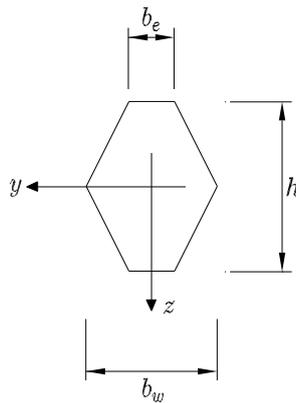


Figura 7.10 Sección hexagonal sometida a flexocompresión desviada

Obtener:

1. La ecuación del eje neutro
2. La representación gráfica del eje neutro y de la distribución de tensiones normales

Datos:

$$h = 300 \text{ mm} , b_w = 230 \text{ mm} , b_e = 80 \text{ mm}$$

Solución:

1. La ecuación del eje neutro

$$y = 82,173 + 1,162z \text{ mm}$$

2. La representación gráfica del eje neutro y de la distribución de tensiones normales

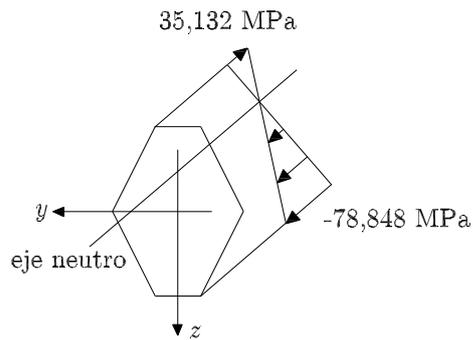


Figura 7.11 Sección hexagonal sometida a flexocompresión desviada. Distribución de tensiones normales

Ejercicio 7.2

La expresión analítica de la distribución de tensiones normales de la sección en doble T mostrada en la Figura 7.12 es:

$$\sigma_x(y, z) = -3,879 + 0,679y \quad (\text{Fuerzas en N y longitudes en mm})$$

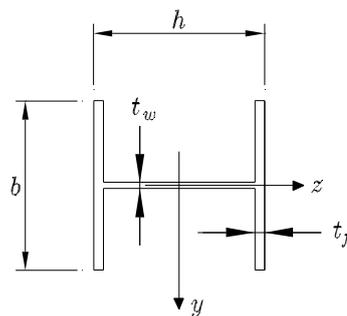


Figura 7.12 Sección en doble T sometida a flexión compuesta

Obtener:

1. La ecuación del eje neutro
2. La representación gráfica del eje neutro y de la distribución de tensiones normales

Datos:

$$h = 300 \text{ mm} , b = 300 \text{ mm} , t_f = 19 \text{ mm} , t_w = 11 \text{ mm}$$

Solución:

1. La ecuación del eje neutro

$$y = 5,713 \text{ mm}$$

2. La representación gráfica del eje neutro y de la distribución de tensiones normales

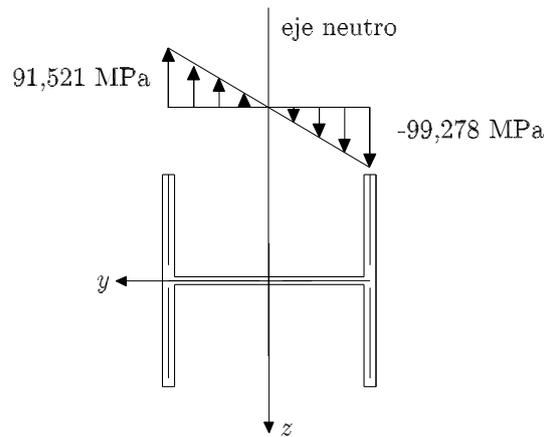


Figura 7.13 Sección en doble T sometida a flexión compuesta. Distribución de tensiones normales