

Lección 6

El modelo de barras: cálculo de esfuerzos

Contenidos

6.1. Definición de barra prismática	78
6.2. Tipos de uniones	78
6.3. Estructuras isostáticas y estructuras hiperestáticas . . .	81
6.4. Definición de esfuerzos (solicitud)	82
6.5. Ecuaciones de equilibrio	85
6.6. Leyes de esfuerzos	88
6.7. Diagramas de esfuerzos	88
6.8. Ejercicios propuestos	90

6.1 Definición de barra prismática

Se define barra prismática o pieza prismática como el volumen engendrado por el movimiento de una sección plana A (que puede tener huecos en su interior) al recorrer su centro de gravedad G una curva plana que se denomina *directriz* o eje de la pieza, manteniéndose la sección A normal a la directriz y permaneciendo durante el movimiento uno de sus ejes (que no tiene por qué ser de simetría), en el plano de la directriz. La sección A puede variar de tamaño de una forma suave durante su movimiento a lo largo de la directriz. Además, se supondrá que los radios de curvatura de la directriz en los distintos puntos son muy grandes comparados con cualquier dimensión de la sección. Es decir, solo se consideran piezas de pequeña curvatura. No obstante, lo más habitual es la utilización de barras prismáticas de directriz recta, como la que se muestra en la Figura 6.1.

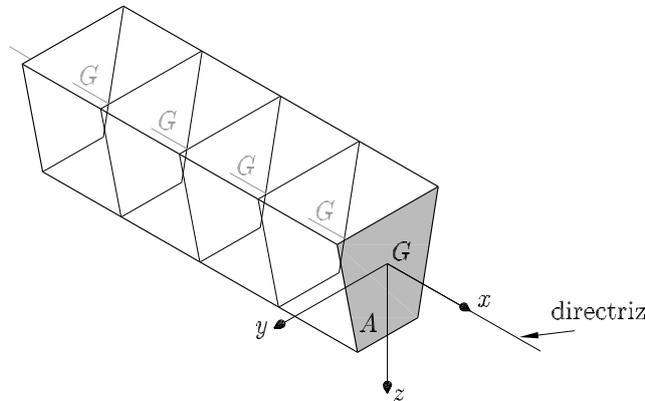


Figura 6.1 Definición de barra prismática

6.2 Tipos de uniones

Cualquier punto de una sección transversal de una barra prismática, en el espacio, tiene seis grados de libertad: tres posibles desplazamientos (u , v y w) en las direcciones de los ejes coordenados, y tres posibles giros (θ_x , θ_y y θ_z) alrededor de dichos ejes.

Las barras que componen las estructuras están unidas entre sí o al suelo mediante ligaduras que coartan algunas o todas las posibilidades de movimiento de los extremos de las barras. En las ligaduras se desarrollan unas fuerzas (reacciones) que impiden tales movimientos. El sistema de fuerzas constituido por las fuerzas aplicadas directamente sobre la estructura y las reacciones debe estar en equilibrio, por lo que debe verificarse, si la estructura es espacial, que

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Si la estructura es plana (por ejemplo, está contenida en el plano XZ), se verifica que

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad (6.2)$$

En este último caso, cada punto tiene tres grados de libertad: dos desplazamientos (u , w) en las direcciones de los ejes x y z respectivamente y un giro (θ_y) alrededor del eje y .

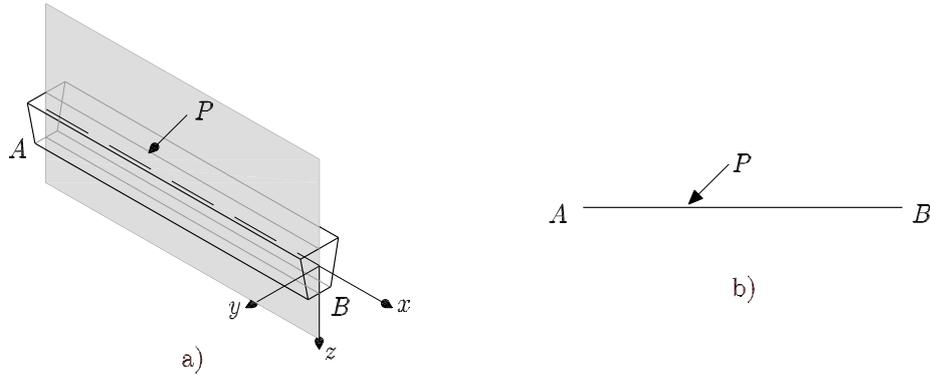


Figura 6.2 Barra prismática sometida a carga puntual

Sea la barra AB de la Figura 6.2 a), con sección transversal simétrica respecto al eje z . Está sometida a una carga P contenida en el plano XZ . Para facilitar la representación gráfica se trabajará con la directriz de la barra, tal como se muestra en la Figura 6.2 b).

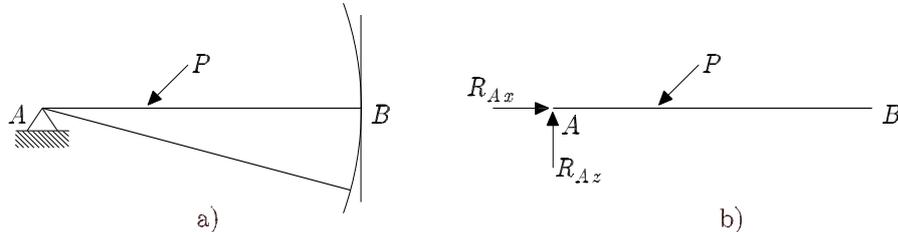


Figura 6.3 Movimiento como sólido rígido de la barra

Al actuar la fuerza P , la barra se moverá libremente en el plano con un movimiento compuesto de traslación y rotación. Si se introduce una ligadura en el punto A , tal que permita el giro de la barra alrededor de dicho punto pero impida cualquier traslación (se considera que no hay rozamiento en la rótula), la barra, como sólido rígido, solo podrá girar alrededor de A . El punto B describe un arco de radio AB que se muestra en la Figura 6.3 a).

Al considerar la hipótesis de pequeños desplazamientos, se puede asumir que el desplazamiento del punto B es vertical. Los movimientos horizontal y vertical del punto A están impedidos por la ligadura dispuesta, que introduce las fuerzas (reacciones) R_{Ax} y R_{Az} que se muestran en la Figura 6.3 b).

Si se introduce una ligadura en B que impida su movimiento vertical, como se muestra en la Figura 6.4 a), se evita el giro alrededor de A y el movimiento como sólido libre de la barra. El movimiento vertical del punto B está impedido por la ligadura mencionada, que introduce la fuerza (reacción) R_{Bz} que se muestra en la Figura 6.4 b).

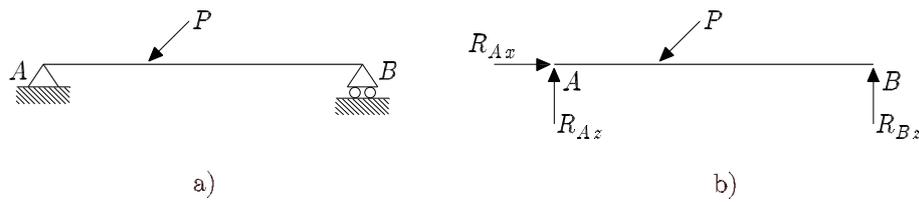


Figura 6.4 Reacciones en la barra AB que impiden el movimiento como sólido libre

Para las estructuras planas, los tipos de apoyos (ligaduras) más comunes se resumen en la Figura 6.5.

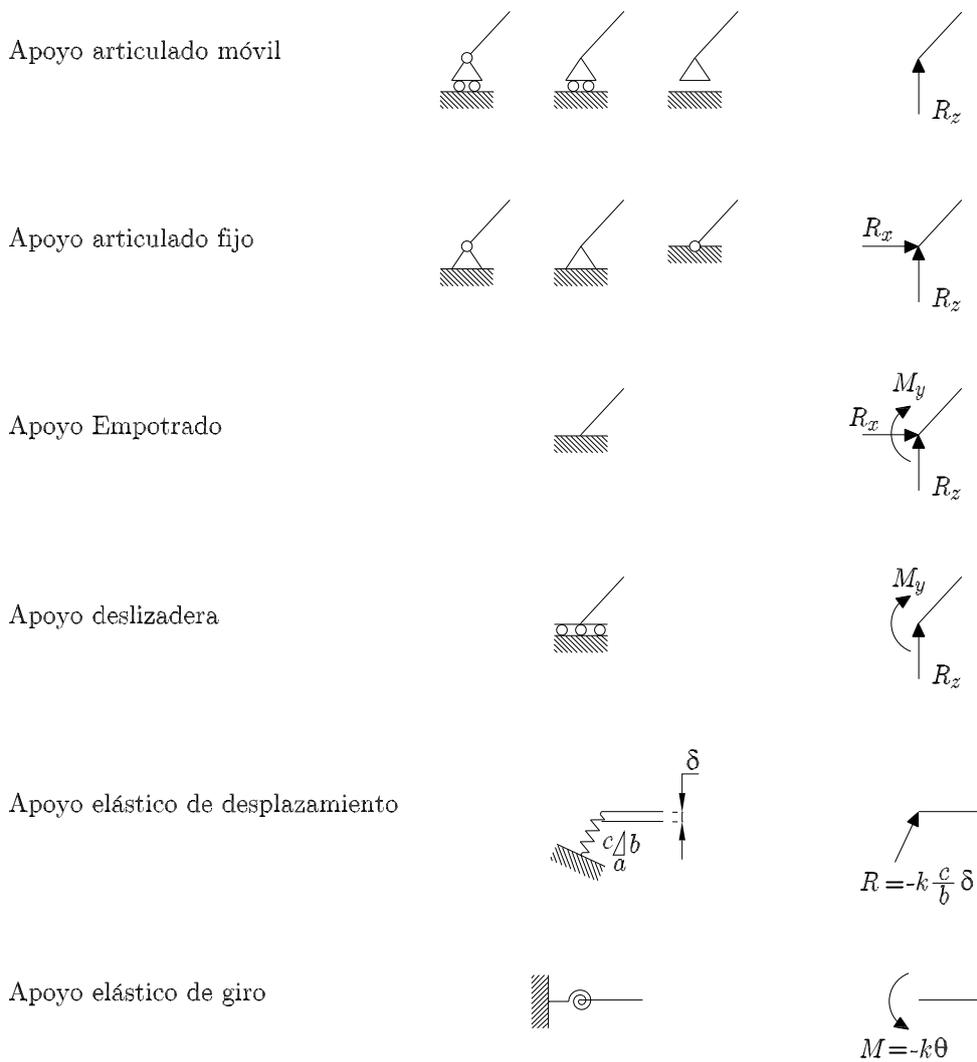


Figura 6.5 Apoyos más habituales

Los extremos de las barras unidos a cada uno de estos apoyos tienen impedidos algunos grados de libertad, según el tipo de apoyo. Esto implica la aparición de unas reacciones que deben considerarse como fuerzas exteriores actuantes sobre la

estructura, aunque no se conozca su valor a priori. Las articulaciones en los apoyos se considerarán sin rozamiento.

El *apoyo articulado móvil* permite el giro alrededor de la articulación y el desplazamiento en la dirección del terreno donde se apoya.

El *apoyo articulado fijo* permite el giro alrededor de la articulación e impide los movimientos en el plano donde se sitúa.

El *apoyo empotrado* impide los desplazamientos en el plano y el giro.

El *apoyo deslizadera* impide el desplazamiento en dirección perpendicular al terreno donde se sitúa y el giro.

Los *apoyos elásticos* permiten un desplazamiento (giro) en la dirección del muelle inversamente proporcional a la rigidez de este.

6.3 Estructuras isostáticas y estructuras hiperestáticas

El conjunto de cargas que actúan sobre una estructura queda completamente definido si se conocen las fuerzas directamente aplicadas sobre ella, y las reacciones en las ligaduras (normalmente desconocidas).

Para establecer el equilibrio de fuerzas sobre la estructura, además de las ecuaciones (6.1) en el caso espacial, o (6.2) en el caso plano, si la estructura tiene rótulas, se plantea por cada rótula una ecuación adicional.

Una rótula divide a la estructura en dos partes e impide la transmisión de momentos entre estas. Por tanto, ha de verificarse que el sumatorio de momentos respecto a la rótula de todas las fuerzas y momentos **actuando a un lado u otro** de la rótula debe ser nulo.

El grado de hiperestaticidad (h_a) de una estructura se define como el número de ecuaciones adicionales (además de las de equilibrio y las que ofrecen las rótulas) necesarias para calcular las reacciones en las ligaduras.

Si el número de reacciones desconocidas en las ligaduras coincide con el número de ecuaciones de equilibrio de la estructura ($h_a = 0$), se dice que la estructura es isostática. La Figura 6.6 muestra dos estructuras en las que se tienen suficientes ecuaciones de equilibrio y de rótulas para determinar las reacciones en los apoyos.

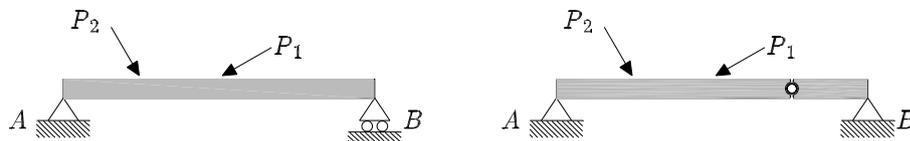


Figura 6.6 Estructuras isostáticas

Si el número de reacciones desconocidas es superior al de ecuaciones ($h_a > 0$), se dice que la estructura es hiperestática. La Figura 6.7 muestra un ejemplo en el que es necesario buscar ecuaciones adicionales a las de equilibrio y a las que ofrecen las rótulas para determinar las reacciones. Estas ecuaciones adicionales pueden plantearse en términos de desplazamientos conocidos.

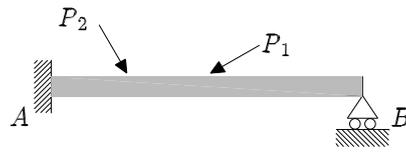


Figura 6.7 Estructura hiperestática

6.4 Definición de esfuerzos (solicitación)

Sea la barra biapoyada que se muestra en la Figura 6.8. La barra presenta simetría respecto al plano XZ . La carga vertical P está contenida en dicho plano XZ , siendo los ejes y y z de la sección los ejes principales de inercia.

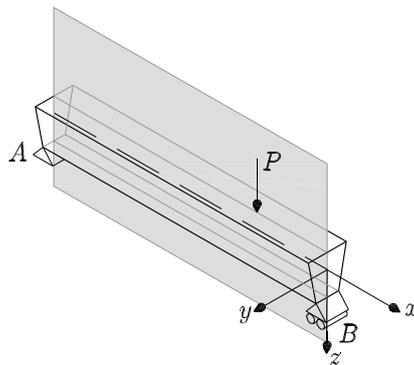


Figura 6.8 Viga biapoyada sometida a carga puntual

La carga P se transmite a los apoyos generándose en éstos las reacciones R_1 y R_2 , que también estarán contenidas en el plano XZ , como se muestra en la Figura 6.9 a), donde se ha dibujado solo la directriz de la barra. Aislando un trozo de barra e imponiendo su equilibrio, deben actuar sobre la sección de corte una fuerza vertical que equilibre la reacción y un momento, el cual es necesario para el equilibrio de momentos, como se muestra en la Figura 6.9 b). El momento se produce alrededor del eje y , y la fuerza vertical R_1 está contenida en el plano XZ .

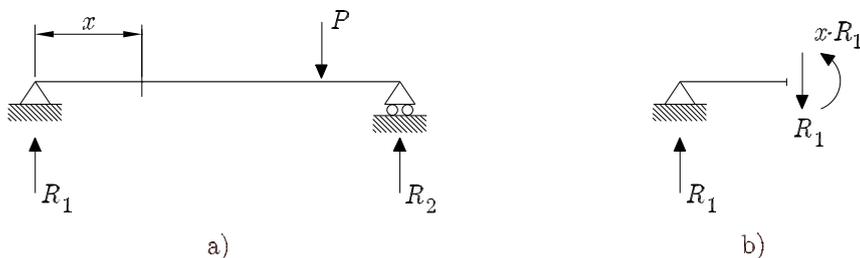


Figura 6.9 a) Reacciones. b) Fuerzas de equilibrio sobre una sección arbitraria

La transmisión de una parte (R_1) de la carga P desde su punto de aplicación hasta el apoyo izquierdo, se realiza al desarrollar el material un estado tensional estáticamente equivalente a una fuerza y a un momento en cada sección. En este caso concreto, la fuerza vertical es la resultante de la distribución de tensiones tangenciales τ_{xz} en el

área de la sección, y el momento está causado por las tensiones normales σ_x , como se muestra en las Figuras 6.10 a) y b).

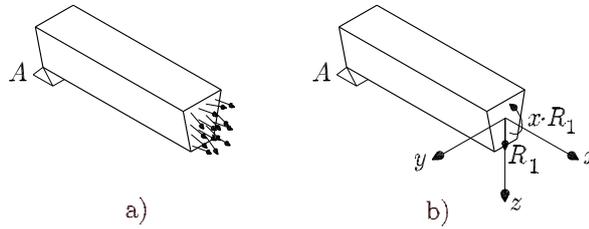


Figura 6.10 a) Estado tensional. b) Fuerzas equivalentes al estado tensional en la sección

A partir de este ejemplo sencillo se pueden definir los esfuerzos como *las fuerzas y los momentos estáticamente equivalentes a la distribución de vectores tensión que debe desarrollar el material en los puntos de cada sección para transmitir las cargas exteriores.*

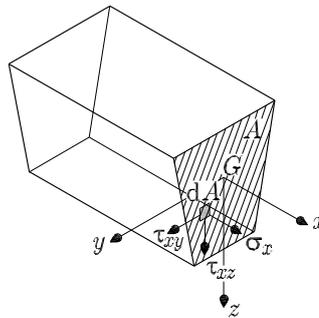


Figura 6.11 Tensiones sobre un elemento diferencial de una sección de área A de una barra prismática

En el caso más general, la sección de una barra estará sometida a un estado tensional similar al que se muestra en la Figura 6.11, estáticamente equivalente a seis esfuerzos: un esfuerzo axial, dos esfuerzos cortantes, un momento torsor y dos momentos flectores.

El esfuerzo axial $N_x(x)$ se define como la fuerza resultante de integrar las tensiones normales $\sigma_x(x, y, z)$ en el área de la sección:

$$N_x(x) = \int_A \sigma_x(x, y, z) dA \tag{6.3}$$

Los esfuerzos cortantes $V_y(x)$ y $V_z(x)$ se definen como las fuerzas resultantes de integrar las tensiones tangenciales $\tau_{xy}(x, y, z)$ y $\tau_{xz}(x, y, z)$, respectivamente, en el área de la sección:

$$V_y(x) = \int_A \tau_{xy}(x, y, z) dA \tag{6.4}$$

$$V_z(x) = \int_A \tau_{xz}(x, y, z) dA \tag{6.5}$$

Se considerará que el axil y los cortantes son positivos cuando, actuando en una sección de normal positiva, llevan la dirección positiva de los ejes, o cuando en una cara de normal negativa llevan el sentido contrario.

En la figura 6.12 se muestran los esfuerzos axil y cortantes sobre una sección de una barra prismática.

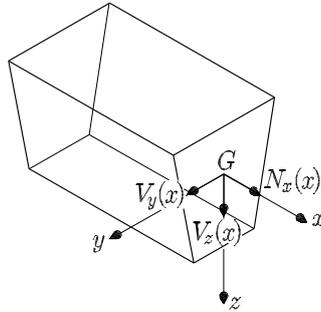


Figura 6.12 Esfuerzos axil y cortantes en direcciones y y z

Los momentos flectores $M_y(x)$ y $M_z(x)$ resultan de integrar en el área de la sección los momentos que producen las fuerzas normales $\sigma_x(x, y, z) dA$ respecto a los ejes y y z , respectivamente:

$$M_y(x) = \int_A z \sigma_x(x, y, z) dA \quad (6.6)$$

$$M_z(x) = \int_A y \sigma_x(x, y, z) dA \quad (6.7)$$

$M_y(x)$ se considerará positivo si lleva el sentido positivo del eje y . $M_z(x)$ se considerará positivo si lleva el sentido negativo del eje z .

Por último, el momento torsor $M_x(x)$ es el resultante de integrar en el área de la sección los momentos que originan las fuerzas tangenciales $\tau_{xy}(x, y, z) dA$ y $\tau_{xz}(x, y, z) dA$ respecto al eje x :

$$M_x(x) = \int_A (y \tau_{xz}(x, y, z) - z \tau_{xy}(x, y, z)) dA \quad (6.8)$$

El sentido positivo es el del eje x .

En la Figura 6.13 a) y en la Figura 6.13 b) se muestran dos formas de representar los momentos flectores y torsor. En la representación de la Figura 6.13 b) se utiliza el vector con doble flecha para indicar el sentido del momento de acuerdo a la *regla de la mano derecha*, como se muestra en la Figura 6.13 c). Según el criterio adoptado, valores positivos de $M_y(x)$ y $M_z(x)$ implica que ambos momentos producen tracciones en el primer cuadrante.

De las ecuaciones (6.3) a (6.8), se deduce que los esfuerzos son función, exclusivamente, de la coordenada x que se considere. Es decir, se ha pasado de un modelo tridimensional, planteado en elasticidad, a un modelo de barra que es unidimensional. Se admitirá que cualquier esfuerzo es constante en toda la sección.

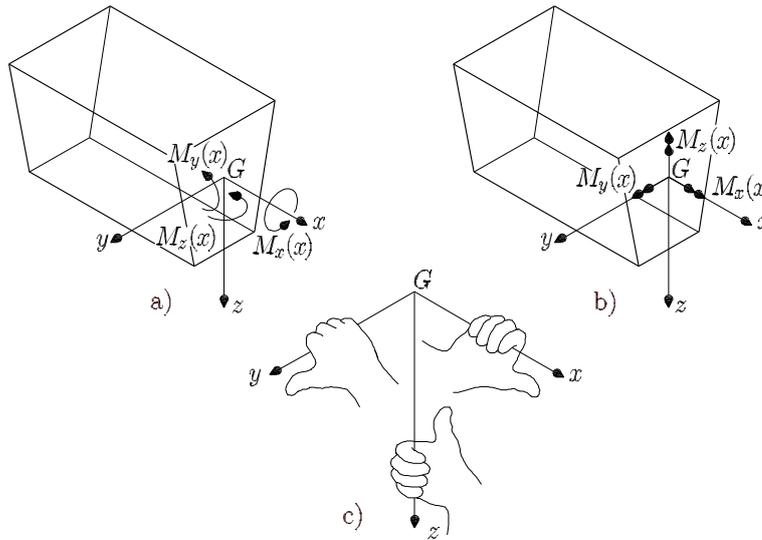


Figura 6.13 Momentos torsor y flectores alrededor de los ejes y y z

6.5 Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio interno del modelo de barras se obtienen planteando el equilibrio de fuerzas y momentos que actúan sobre una rebanada diferencial de la barra.

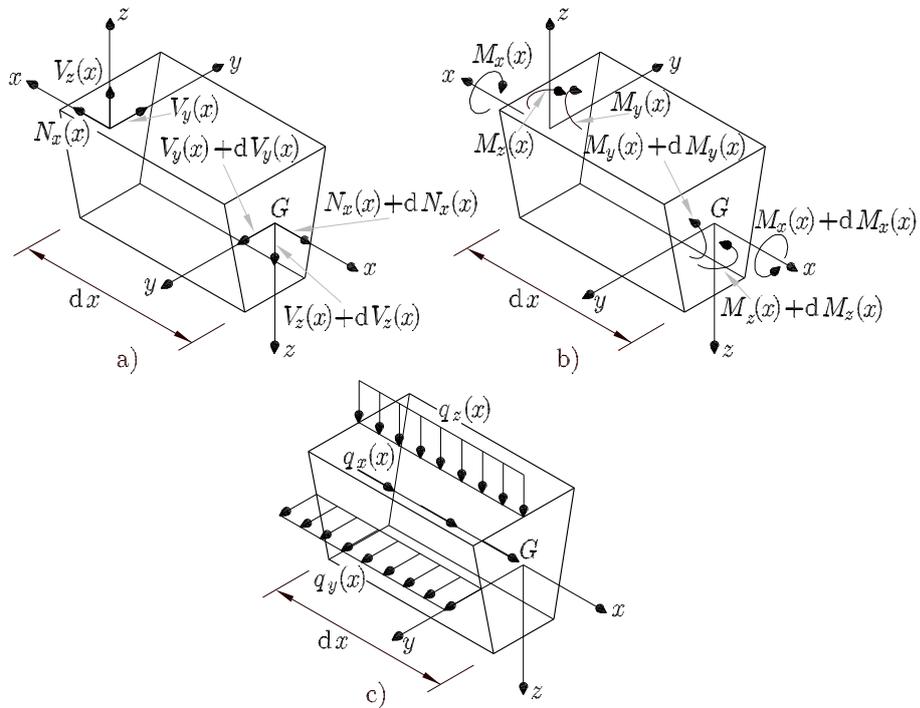


Figura 6.14 Esfuerzos y fuerzas actuantes sobre una rebanada

En la Figura 6.14 se muestra una rebanada diferencial de longitud dx y todas las

cargas y esfuerzos que la solicitan.

En la sección frontal de la rebanada diferencial que se muestra en las Figuras 6.14 a) y b), actúan los esfuerzos $N_x(x)$, $V_y(x)$, $V_z(x)$, $M_x(x)$, $M_y(x)$ y $M_z(x)$, que son estáticamente equivalentes a la distribución de tensiones en dicha sección. En la sección dorsal de la rebanada diferencial actúan esos mismos esfuerzos incrementados una cantidad diferencial, $N_x(x) + dN_x(x)$, $V_y(x) + dV_y(x)$, $V_z(x) + dV_z(x)$, $M_x(x) + dM_x(x)$, $M_y(x) + dM_y(x)$ y $M_z(x) + dM_z(x)$. Finalmente, hay aplicadas unas cargas $q_x(x)$, $q_y(x)$ y $q_z(x)$, que se muestran en la Figura 6.14 c), y unos momentos $g_x(x)$, $g_y(x)$ y $g_z(x)$, ambos tipos de cargas repartidas uniformemente sobre la longitud dx (los momentos distribuidos uniformemente no se han representado).

Imponiendo el equilibrio de fuerzas y momentos en la rebanada diferencial, al igual que se hace en elasticidad con las tensiones a nivel de punto, se obtienen las seis ecuaciones de equilibrio interno.

El equilibrio de fuerzas en la dirección x es

$$N_x(x) + dN_x(x) - N_x(x) + q_x(x) dx = 0 \quad (6.9)$$

obteniéndose que

$$\frac{dN_x(x)}{dx} + q_x(x) = 0 \quad (6.10)$$

Los equilibrios de fuerzas en las direcciones y y z son

$$V_y(x) + dV_y(x) - V_y(x) + q_y(x) dx = 0 \quad (6.11)$$

$$V_z(x) + dV_z(x) - V_z(x) + q_z(x) dx = 0 \quad (6.12)$$

obteniéndose que

$$\frac{dV_y(x)}{dx} + q_y(x) = 0 \quad (6.13)$$

$$\frac{dV_z(x)}{dx} + q_z(x) = 0 \quad (6.14)$$

Por último, se establecerán los equilibrios de momentos. El equilibrio de momentos alrededor del eje x es

$$M_x(x) + dM_x(x) - M_x(x) + g_x(x) dx = 0 \quad (6.15)$$

despejando se obtiene

$$\frac{dM_x(x)}{dx} + g_x(x) = 0 \quad (6.16)$$

Los equilibrios de momentos alrededor de los ejes y y z son

$$M_y(x) + dM_y(x) - M_y(x) - V_z(x) dx + g_y(x) dx + q_z(x) dx \frac{dx}{2} = 0 \quad (6.17)$$

$$M_z(x) + dM_z(x) - M_z(x) - V_y(x) dx + g_z(x) dx + q_y(x) dx \frac{dx}{2} = 0 \quad (6.18)$$

Despreciando el infinitésimo de orden superior (dx^2), se obtiene

$$\frac{dM_y(x)}{dx} - V_z(x) + g_y(x) = 0 \quad (6.19)$$

$$\frac{dM_z(x)}{dx} - V_y(x) + g_z(x) = 0 \quad (6.20)$$

Si se considera que la sección es simétrica respecto al plano XZ , y que todas las cargas actúan sobre dicho plano, se puede pasar al modelo plano de rebanada que se muestra en la Figura 6.15.

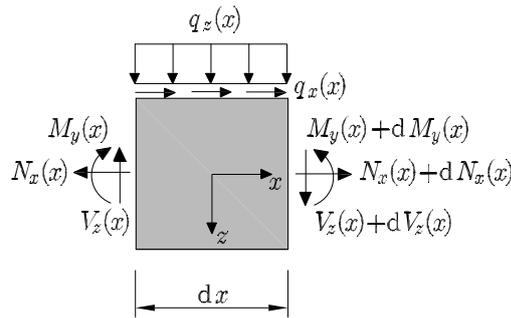


Figura 6.15 Equilibrio de una rebanada considerando todas las cargas actuando en el plano XZ

Estableciendo el equilibrio entre fuerzas y esfuerzos, las ecuaciones de equilibrio interno son:

$$\frac{dN_x(x)}{dx} + q_x(x) = 0 \quad (6.21)$$

$$\frac{dV_z(x)}{dx} + q_z(x) = 0 \quad (6.22)$$

$$\frac{dM_y(x)}{dx} - V_z(x) = 0 \quad (6.23)$$

- De la expresión (6.21) se deduce que en cualquier tramo de una viga con $q_x = 0$, el esfuerzo axil $N_x(x)$ es constante.
- De las ecuaciones (6.22) y (6.23) se deduce que en cualquier tramo de una viga con $q_z = 0$, el esfuerzo cortante $V_z(x)$ es constante y $M_y(x)$ varía linealmente.
- De las ecuaciones (6.22) y (6.23) se deduce que en tramos de una viga con $q_z \neq 0$, el esfuerzo cortante $V_z(x)$ y el momento flector $M_y(x)$ varían con leyes continuas de primer y segundo grado, respectivamente, si q_z es constante. Estas leyes serían de segundo y tercer grado, respectivamente, si q_z variara linealmente.
- De la ecuación (6.23) se deduce que si en un tramo $V_z(x) = 0$, $M_y(x)$ es constante. Si $V_z(x)$ es distinto de cero, $M_y(x)$ existe y es variable.
- De la expresión (6.23) se deduce que para las secciones en que el esfuerzo cortante se anula, el momento flector se hace máximo. No puede ser mínimo porque la derivada segunda de $M_y(x)$ es negativa, ya que

$$q_z(x) = -\frac{dV_z(x)}{dx} \quad (6.24)$$

y teniendo en cuenta (6.23), se obtiene

$$q_z(x) = -\frac{dV_z(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} \frac{dM_y(x)}{dx} = -\frac{d^2M_y(x)}{dx^2} \quad (6.25)$$

6.6 Leyes de esfuerzos

Al considerar el modelo unidimensional de barras, los esfuerzos sobre cada sección son exclusivamente función de la coordenada x y constantes en toda la sección. Por tanto, dando los cortes adecuados en la barra de forma que se consideren todas las cargas actuantes y la distribución de las mismas sobre esta y planteando las ecuaciones de equilibrio entre esfuerzos y cargas en cada sección de corte, se obtendrán las ecuaciones de variación de los esfuerzos a lo largo de toda la barra en función de la coordenada x . Estas ecuaciones se denominan *leyes de esfuerzos*.

En la Figura 6.16 se muestran los cortes que hay que dar en la estructura representada para que queden perfectamente determinadas las leyes de esfuerzos en toda ella.

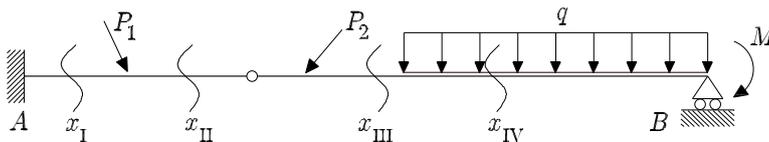


Figura 6.16 Secciones a estudiar para el cálculo de esfuerzos en la barra

Para esta estructura, teniendo en cuenta las solicitaciones actuantes, son necesarios cuatro cortes. Los esfuerzos calculados en la sección de abscisa x_I son válidos para todo el tramo comprendido entre el apoyo A y la carga P_1 , ambos extremos incluidos. En la sección de abscisa x_{II} los esfuerzos calculados son válidos para el tramo comprendido entre los puntos de aplicación de P_1 y P_2 , ambos incluidos. Los esfuerzos calculados en la sección de abscisa x_{III} son válidos para el tramo comprendido entre el punto de aplicación de P_2 y el comienzo de la carga distribuida q . Finalmente, los esfuerzos calculados en la sección de abscisa x_{IV} son válidos para el tramo comprendido entre el punto de comienzo de la carga distribuida y el apoyo B . De esta forma, las leyes de esfuerzos quedan perfectamente definidas para cualquier sección de la barra.

Las leyes de esfuerzos son funciones continuas, salvo en los puntos donde actúan cargas o momentos puntuales.

6.7 Diagramas de esfuerzos

La representación gráfica de las leyes de esfuerzos permite visualizar aquellas secciones más solicitadas, las cuales serán las más críticas para comprobar a resistencia y deformación. Esta representación gráfica recibe el nombre de *diagramas de esfuerzos*.

La construcción de los diagramas de esfuerzos no es más que la representación gráfica de las ecuaciones de las leyes de esfuerzos. El eje de abscisas representa la

coordenada x de cada una de las posibles secciones de la barra. En ordenadas se representan los esfuerzos. A modo ilustrativo, en la Figura 6.17 se muestran los diagramas de esfuerzos de la estructura de la Figura 6.16.

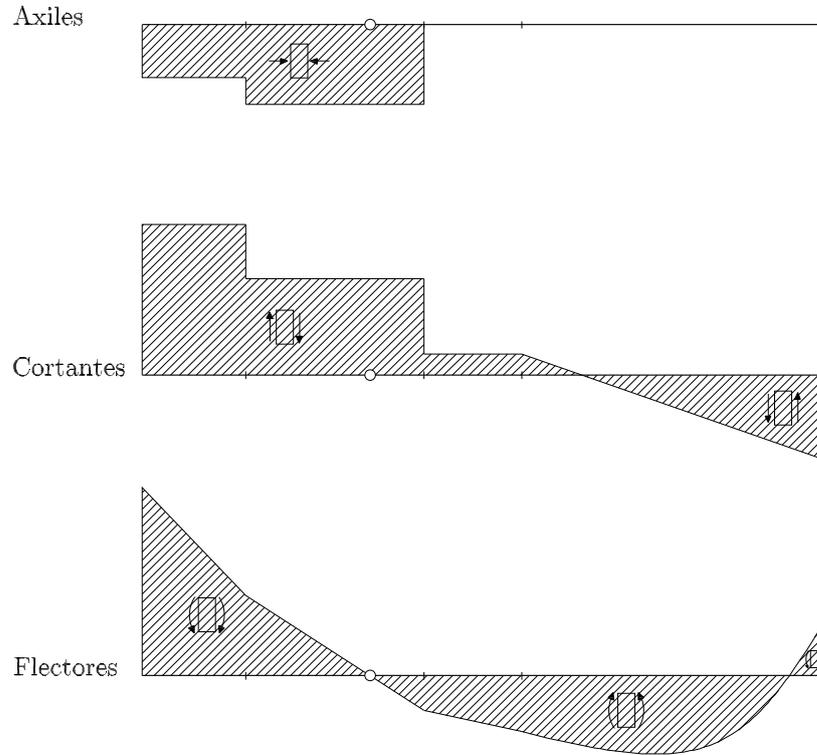


Figura 6.17 Diagramas de esfuerzos

El signo de los esfuerzos se determina a partir del criterio de esfuerzos positivos a ambos lados de una rebanada elemental, mostrado en la Figura 6.18 a). Para que el sentido de los esfuerzos quede perfectamente definido es necesario utilizar el símbolo correspondiente de entre los indicados en la Figura 6.18 b).

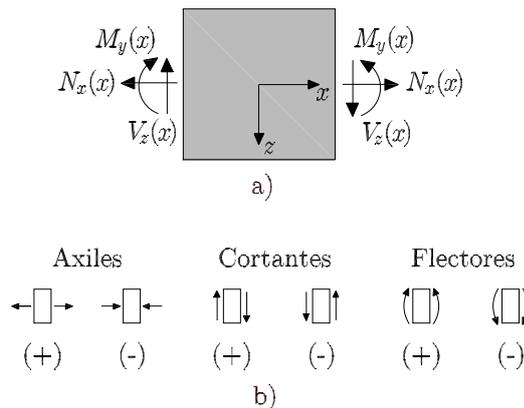


Figura 6.18 Criterio de signos a ambos lados de la rebanada diferencial y símbolos y signo de los esfuerzos

Trazar los diagramas por encima o por debajo del eje x no da información sobre el

signo de los esfuerzos sino van acompañados del correspondiente símbolo, que es el que indica cómo actúa el esfuerzo sobre la sección.

6.8 Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.1

Para la estructura de la Figura 6.19,

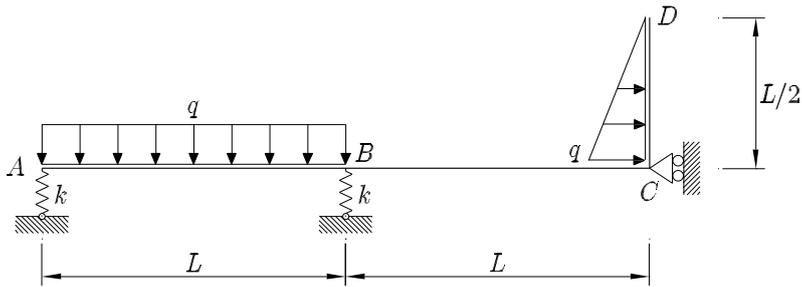


Figura 6.19 Estructura sometida a cargas uniformes

Se pide:

1. Calcular las reacciones en los apoyos
2. Calcular las expresiones de las leyes de esfuerzos
3. Dibujar los diagramas de esfuerzos, acotando los valores máximos y mínimos de los esfuerzos y las coordenadas de los puntos en que se producen

Datos:

$$\begin{aligned}
 L &= 4 \text{ m} \\
 k &= 5 \cdot 10^3 \text{ kN/m} , E = 210 \text{ GPa} \\
 q &= 20 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Solución:

1. Calcular las reacciones en los apoyos

$$R_{Az} = 36,667 \text{ kN}$$

$$R_{Bz} = 43,333 \text{ kN}$$

$$R_{Cx} = -20 \text{ kN}$$

2. Calcular las expresiones de las leyes de esfuerzos

Tabla 6.1 Leyes de esfuerzos

Tramo	N_x	V_z	M_y
AB	0	$-20x + 36,667$	$-10x^2 + 36,667x$
BC	0	0	-13,333
DC	0	$5x^2$	$-1,667x^3$

3. Dibujar los diagramas de esfuerzos, acotando los valores máximos y mínimos de los esfuerzos y las coordenadas de los puntos en que se producen

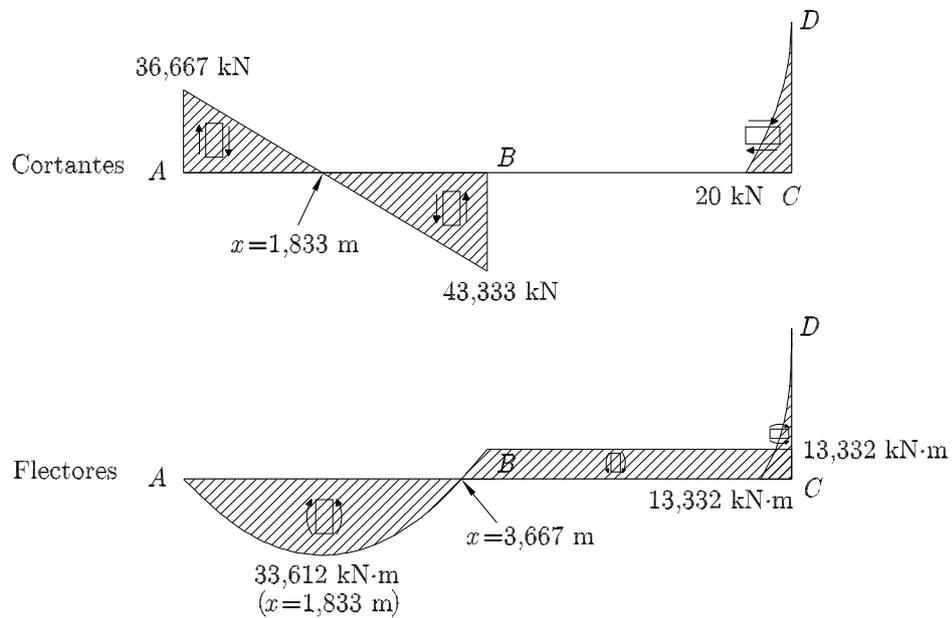


Figura 6.20 Diagramas de esfuerzos de una estructura sometida a cargas uniformes

