

Lección 5

Criterios de plasticidad y de rotura

Contenidos

5.1. Criterio de plasticidad para materiales sujetos a un estado triaxial de tensiones	64
5.2. Criterio de plasticidad de Von Mises	65
5.3. Criterio de plasticidad de Tresca	66
5.4. Comparación de los Criterios de plasticidad de Von Mises y de Tresca	68
5.5. Fallo de las estructuras. Factor de seguridad para el diseño	69
5.6. Criterio de rotura de la máxima componente de la tensión normal para materiales frágiles, isótropos y con comportamiento elástico y lineal	71
5.7. Criterio de rotura de Mohr para materiales frágiles sujetos a un estado plano de tensiones	71
5.8. Ejercicios propuestos	74

5.1 Criterio de plasticidad para materiales sujetos a un estado triaxial de tensiones

En cada punto de un sólido sometido a acciones exteriores existe un estado tensional, y por consiguiente, un estado de deformaciones. Cuando las acciones exteriores no superan un determinado umbral, el sólido recupera su forma original cuando cesan dichas acciones. La deformación del sólido es reversible. No hay pérdida de energía durante el proceso de carga y descarga del sólido. En este caso se dice que el sólido tiene un comportamiento elástico. Cuando las acciones exteriores superan un determinado umbral, la deformación del sólido tiene una parte irreversible. Se dice que el sólido se ha deformado plásticamente. La deformación del sólido tiene una componente elástica (reversible) y una componente plástica (irreversible).

El estado de tracción pura que se asocia a todos los puntos de una probeta sometida a un ensayo de tracción no es más que uno de los infinitos estados tensionales a que puede estar sometido un punto de un sólido. Surge inmediatamente la necesidad de definir los límites de comportamiento elástico para un caso general de estado de tensiones. Para ello se han desarrollado diversos *criterios de plasticidad*.

El criterio de plasticidad para un material con comportamiento plástico ideal, se puede expresar matemáticamente como

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_e) = 0 \quad (5.1)$$

Si el material es isótropo, los valores de la función de plastificación son independientes del sistema de referencia utilizado. Por tanto, para materiales isótropos, con comportamiento plástico ideal, la función de plastificación puede expresarse en función de las tensiones principales como

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_e) = 0 \quad (5.2)$$

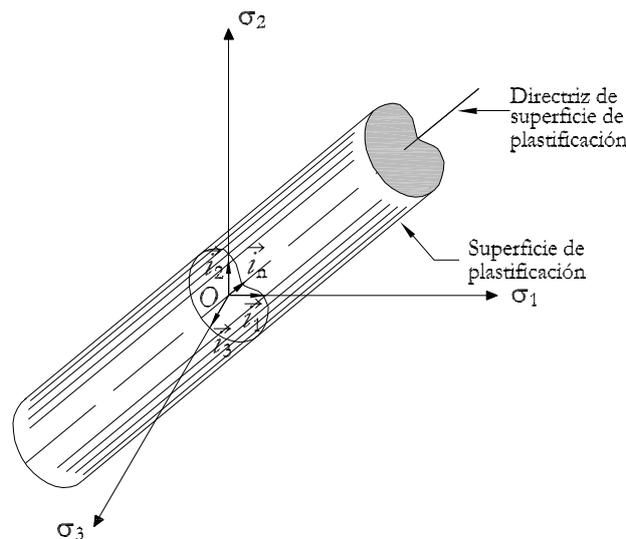


Figura 5.1 Superficie de plastificación para un material isótropo con comportamiento plástico ideal

El criterio de plasticidad puede representarse por una superficie cerrada, que debe ser convexa y, en el caso de materiales isotropos, cilíndrica. La Figura 5.1 muestra como su directriz pasa por el origen del sistema de referencia principal. Además, si se admite que la presión hidrostática no produce plastificación, la dirección de la directriz de la superficie de plastificación es

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{i}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{i}_3 \quad (5.3)$$

La geometría de la sección transversal de la superficie de plastificación depende del criterio de plastificación que se considere. El estado tensional de cualquier punto de un sólido con un comportamiento plástico ideal corresponde a un punto sobre la superficie de plastificación.

5.2 Criterio de plasticidad de Von Mises

En 1913, Von Mises propuso como criterio de plastificación que esta se alcanza cuando las componentes de la tensión, en un punto del sólido, satisfacen la relación

$$\frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = k^2 \quad (5.4)$$

o bien, en ejes no principales

$$\frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right] = k^2 \quad (5.5)$$

siendo k^2 una constante a determinar mediante el ensayo de tracción del material. Así, si el límite elástico obtenido en el ensayo de tracción es σ_e , verificándose que $\sigma_1 = \sigma_e$ y $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, k^2 es, sustituyendo en (5.4)

$$k^2 = \frac{\sigma_e^2}{3} \quad (5.6)$$

Sustituyendo k^2 en las expresiones de Von Mises en ejes principales, queda

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} = \sigma_e \quad (5.7)$$

y en ejes no principales,

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right]} = \sigma_e \quad (5.8)$$

Es decir, las raíces de las expresiones anteriores constituyen la tensión equivalente de Von Mises

$$\sigma_{\text{VM}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} \quad (5.9)$$

o bien,

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right]} \quad (5.10)$$

En el caso de tensión plana, el criterio de Von Mises se simplifica. En el sistema de ejes principales, la tensión equivalente de Von Mises es

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (5.11)$$

y en el sistema de ejes no principales

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (5.12)$$

Si $\sigma_{VM} = \sigma_e$, el estado tensional correspondiente se encuentra sobre la superficie de plastificación. Si $\sigma_{VM} < \sigma_e$, el estado tensional correspondiente es elástico.

El criterio de Von Mises representado en el espacio de las tensiones principales, es una superficie cilíndrica de longitud infinita y de sección transversal circular, tal como se muestra en la Figura 5.2. Por tanto, este criterio cumple que la superficie de plastificación es convexa.

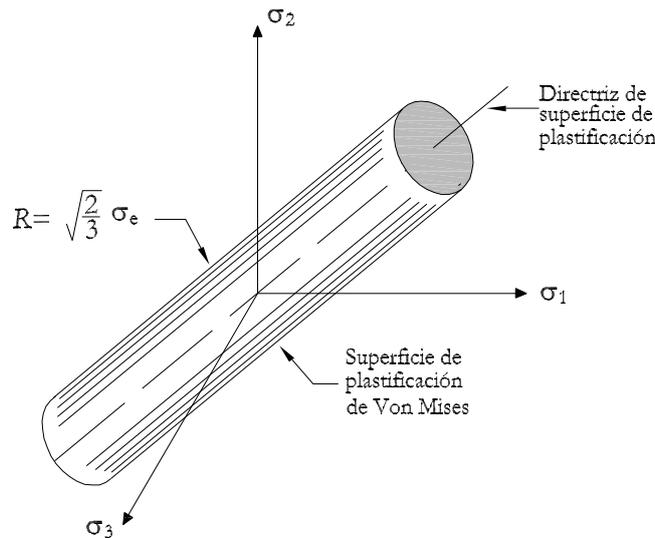


Figura 5.2 Criterio de Von Mises: superficie de plastificación

El criterio de Von Mises se suele adoptar cuando se utilizan materiales metálicos.

5.3 Criterio de plasticidad de Tresca

En 1868, Tresca propuso que la plastificación se alcanza cuando la tensión tangencial máxima, en un punto de un sólido, alcanza un valor igual a la mitad del límite elástico obtenido en el ensayo de tracción del material. Por este motivo, este criterio también se conoce como *criterio de máxima tensión tangencial*.

En un ensayo de tracción se verifica que $\sigma_1 \neq 0$ y $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, siendo la tensión tangencial máxima $\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1}{2}$, como se muestra en la Figura 5.3 a).

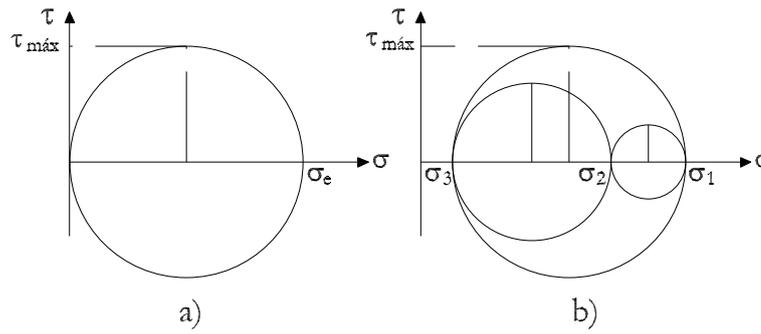


Figura 5.3 a) Tensión tangencial máxima en un ensayo de tracción. b) Tensión tangencial máxima en un estado general de tensiones

Para un estado triaxial de tensiones, siendo las tensiones principales $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, la tensión tangencial máxima es $\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, tal como se muestra en la Figura 5.3 b). En este caso, el criterio de Tresca establece que existe plastificación si

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sigma_e^2 = 0 \tag{5.13}$$

o lo que es lo mismo,

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 \tag{5.14}$$

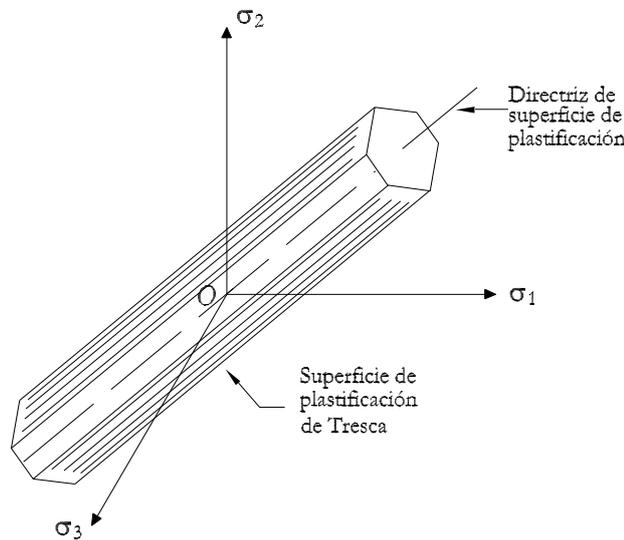


Figura 5.4 Criterio de Tresca: superficie de plastificación

Si no se conoce el orden de las tensiones principales, el criterio de Tresca propone que existe plastificación si se verifica

$$\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_e^2 \right] \left[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_e^2 \right] \left[(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \sigma_e^2 \right] = 0 \tag{5.15}$$

Es decir, se producirá plastificación si se verifica

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \geq \sigma_e \quad (5.16)$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| \geq \sigma_e \quad (5.17)$$

$$|\sigma_3 - \sigma_1| \geq \sigma_e \quad (5.18)$$

Al representar el criterio de Tresca en el espacio de las tensiones principales, este adquiere una superficie de sección transversal hexagonal de longitud infinita, como se muestra en la Figura 5.4. Por tanto, este criterio cumple que la superficie de plastificación es convexa.

5.4 Comparación de los Criterios de plasticidad de Von Mises y de Tresca

En la Figura 5.5 se muestran ambos criterios representados en el espacio de tensiones principales.

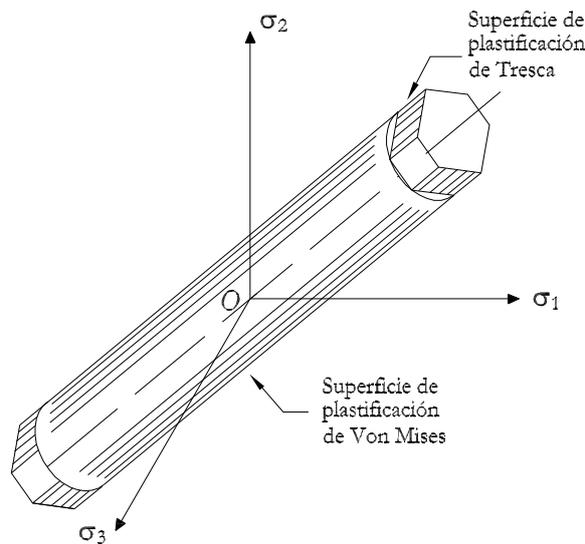


Figura 5.5 Comparación de los criterios de Von Mises y de Tresca en el espacio de tensiones principales

La función de plastificación correspondiente al criterio de Von Mises es no lineal, mientras que la correspondiente al criterio de Tresca es lineal por tramos. Los resultados obtenidos con los dos criterios son muy parecidos. Esto se puede comprobar para un estado plano de tensiones definido por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso, el criterio de Von Mises se reduce a

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_e^2 \quad (5.19)$$

Que corresponde a la expresión de una elipse en el plano σ_1, σ_2 , con los ejes mayor y menor inclinados 45° respecto a los ejes σ_1 y σ_2 , respectivamente, como se muestra en la Figura 5.6.

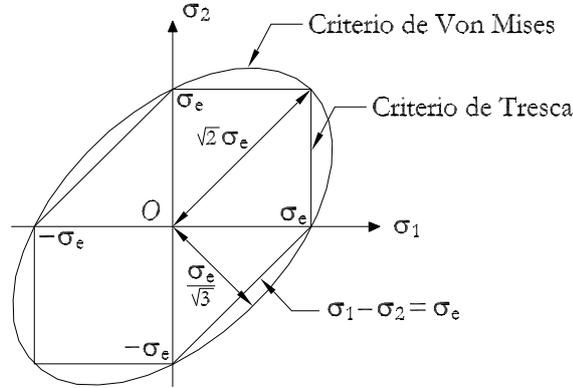


Figura 5.6 Comparación de los criterios de Von Mises y de Tresca para un estado plano de tensiones

El criterio de Tresca depende de la ordenación de σ_1 y σ_2 . Así, si $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$, el criterio de Tresca se reduce a

$$\sigma_1 = \sigma_e \tag{5.20}$$

En el caso que $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$, el criterio de Tresca es

$$\sigma_2 = \sigma_e \tag{5.21}$$

Finalmente, si $\sigma_1 > 0 > \sigma_2$, el criterio de Tresca es

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_e \tag{5.22}$$

En la Figura 5.6 se puede comprobar que las mayores divergencias entre ambos criterios ocurren para $\sigma_1 = -\sigma_2$. En este caso, el criterio de Von Mises establece como tensión equivalente $\sigma_{VM} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}$, mientras que el criterio de Tresca establece $\sigma_T = \frac{\sigma_e}{2}$. La máxima discrepancia entre ambos criterios es aproximadamente de un 15%.

5.5 Fallo de las estructuras. Factor de seguridad para el diseño

La *resistencia* de una estructura es la capacidad de esta de soportar y transmitir cargas sin fallar. Debido a las incertidumbres existentes en el diseño de una estructura, esta se diseña con una resistencia mayor que la requerida. La relación entre la resistencia de diseño y la requerida se conoce como *factor de seguridad*, γ :

$$\gamma = \frac{\text{resistencia de diseño}}{\text{resistencia requerida}} > 1 \tag{5.23}$$

A continuación, se enumeran algunos de los criterios que deben tenerse en cuenta para la determinación del factor de seguridad de una estructura:

- El tipo (estáticas, dinámicas, cíclicas) y magnitud de las cargas que está previsto actúen sobre la estructura a lo largo de su vida útil.
- La calidad prevista de la construcción.
- La calidad de los materiales empleados en la construcción de la estructura.
- Los efectos producidos por las condiciones medioambientales.
- La naturaleza del fallo previsto. El fallo gradual permite reforzar la estructura antes de su colapso.
- Las consecuencias del fallo. Si las consecuencias son catastróficas es necesario incrementar el factor de seguridad.
- El coste del incremento del factor de seguridad.
- Los efectos de las simplificaciones utilizadas en el cálculo de la estructura.

El factor de seguridad se aplica de las siguientes formas:

- Las cargas de diseño se obtienen multiplicando las máximas cargas previstas por un factor de seguridad.

$$\text{Cargas de diseño} = \gamma \times \text{Máximas cargas previstas.}$$

- La tensión máxima de trabajo (en régimen elástico) del material se obtiene dividiendo el límite elástico por un factor de seguridad.

$$\text{Tensión de trabajo en régimen elástico} = \frac{\text{Límite elástico}}{\gamma}.$$

- La tensión máxima de trabajo (en rotura) del material se obtiene dividiendo la tensión última por un factor de seguridad.

$$\text{Tensión última de trabajo} = \frac{\text{Tensión última}}{\gamma}.$$

Los elementos estructurales que conforman una estructura se diseñan de forma que actuando sobre ellos las máximas cargas previstas durante su vida útil, la máxima tensión en cualquiera de sus puntos no supere la obtenida aplicando el criterio de plasticidad o de rotura que se haya decidido utilizar.

Los modos más habituales de fallo de una estructura son:

- Fallo de la estructura debido a una excesiva deformación elástica o viscoelástica de uno o más de los elementos que la constituyen.
- Fallo de estructuras realizadas con materiales dúctiles debido a la inicialización del proceso de plastificación
- Fallo de estructuras realizadas con materiales dúctiles debido al colapso plástico
- Fallo de la estructura por inestabilidad elástica o plástica de alguno de sus elementos
- Fallo de la estructura por rotura repentina de alguno de sus elementos

5.6 Criterio de rotura de la máxima componente de la tensión normal para materiales frágiles, isotrópicos y con comportamiento elástico y lineal

Este criterio considera que un sólido hecho de un material frágil rompe cuando el máximo valor absoluto de la componente normal de la tensión, en cualesquiera de los puntos del sólido, es igual a la tensión última alcanzada en el ensayo de tracción del material. Esto implica que la respuesta de un material sometido a compresión uniaxial es la misma que a tracción uniaxial. En la Figura 5.7 se representa este criterio en el espacio de tensiones principales. Se observa que este criterio supone una superficie de plastificación definida por un cubo, cuyos lados tienen una dimensión del doble de la tensión última del material en tracción o compresión uniaxial.

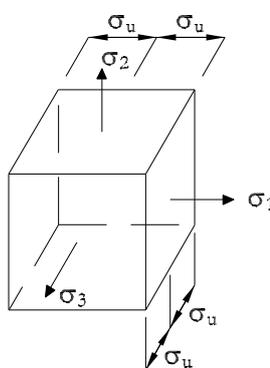


Figura 5.7 Criterio de rotura de la máxima componente de la tensión normal para materiales frágiles: superficie de rotura

5.7 Criterio de rotura de Mohr para materiales frágiles sujetos a un estado plano de tensiones

El criterio de rotura de la máxima componente de la tensión normal es válido para materiales con el mismo comportamiento en tracción y compresión uniaxial. Sin embargo, hay materiales como el hormigón, la fundición, las rocas, los suelos, cuyos comportamientos en tracción y en compresión uniaxial, son diferentes. Otto Mohr propuso un criterio de rotura para estos materiales, válido para estados planos de tensiones. Este criterio precisa de realizar diferentes ensayos mecánicos en el material en estudio.

Sea un material frágil sometido a un estado plano de tensiones. En la Figura 5.8 a) se muestra la gráfica tensión-deformación correspondiente al ensayo de tracción de una probeta de dicho material. En la Figura 5.8 b) se muestran los círculos de Mohr correspondientes a los estados de tensiones definidos por los puntos A , B y U del diagrama tensión-deformación. La probeta se considera segura para niveles de fuerzas que causen tensiones inferiores a σ_1^A o σ_1^B . La probeta fallará cuando la fuerza cause tensiones que alcancen el valor correspondiente a la tensión σ_u . En la Figura 5.8 b) se comprueba como los círculos de Mohr correspondientes a estados tensionales seguros son interiores al círculo de Mohr correspondiente al estado último de tensiones.

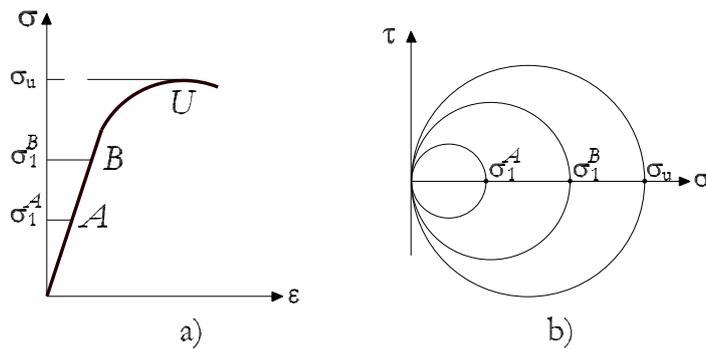


Figura 5.8 Círculos de Mohr para los puntos de un sólido sometido a tracción uniaxial

Sea ahora un sólido hecho de un material frágil del que se conocen las tensiones últimas en tracción y compresión uniaxial. En la Figura 5.9 a) se muestran los círculos de Mohr correspondientes a estos estados. El sólido está sujeto a cargas que inducen estados planos de tensiones cuyas tensiones principales son σ_1 y σ_2 , ambas de tracción o de compresión. Según establece Mohr, el sólido bajo el estado de cargas supuesto es seguro cuando los círculos de Mohr correspondientes a los distintos estados tensionales de cada punto del sólido, son interiores a los círculos de Mohr correspondientes a los estados últimos en tracción o compresión. Si alguna de las tensiones principales es igual a la tensión última del material en tracción o compresión, es inseguro.

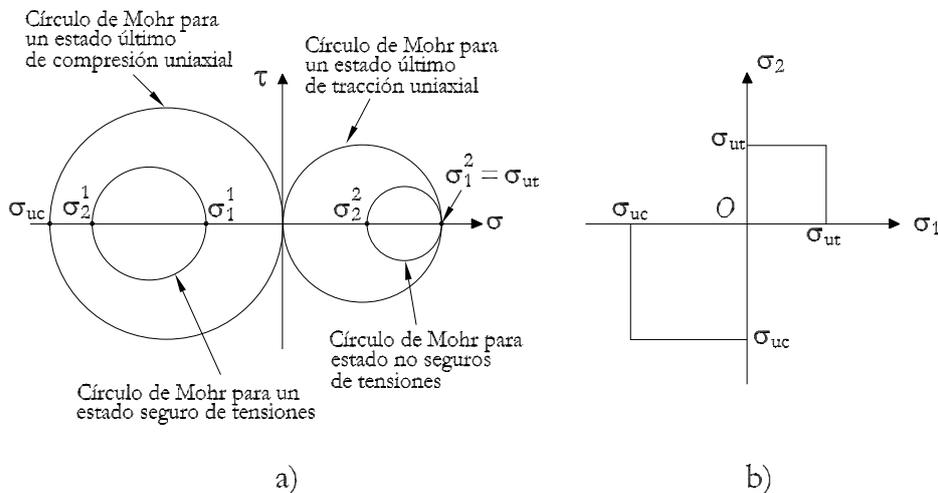


Figura 5.9 Estados tensionales seguros e inseguros de acuerdo con el criterio de rotura de Mohr

En la Figura 5.9 a) se muestran los círculos de Mohr para estados tensionales seguros y no seguros, de acuerdo con el criterio de Mohr. En la Figura 5.9 b) se muestra, en el plano de las tensiones principales, el criterio de Mohr para el sólido considerado.

Para utilizar el criterio de Mohr, es necesario realizar diferentes ensayos bajo diferentes estados de carga y construir los círculos de Mohr correspondientes a los estados últimos de tensiones. Por ejemplo, realizando ensayos de compresión uniaxial, torsión pura y tracción uniaxial en un material, se pueden construir los círculos de

Mohr correspondientes a los estados últimos de tensiones dados por estos ensayos, así como trazar la envolvente de dichos círculos, tal como se muestra en la Figura 5.10 a). Según el criterio de rotura de Mohr, un sólido hecho del mismo material que la probeta ensayada, sometido a un estado plano de tensiones, es seguro si el círculo de Mohr correspondiente a cualquier estado tensional posible en el sólido es interior a la envolvente definida anteriormente. En la Figura 5.10 b) se muestra el criterio en el espacio de tensiones principales.

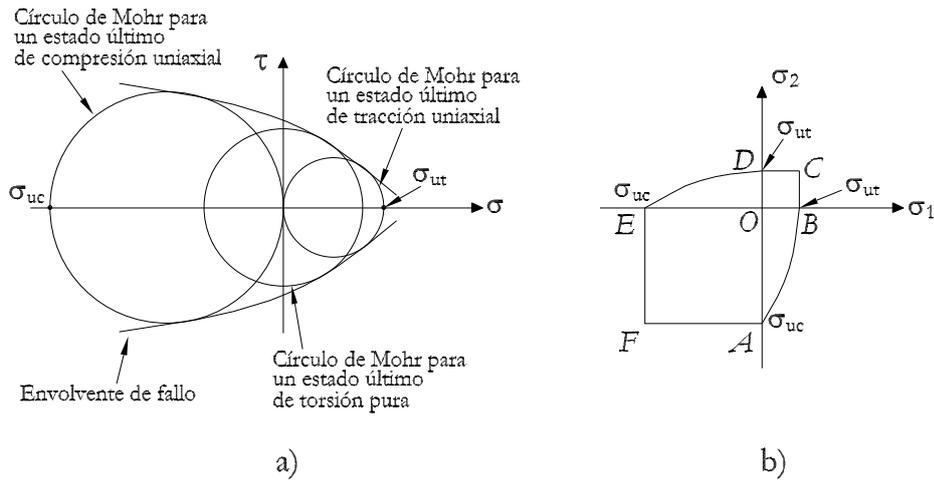


Figura 5.10 Envolvente de fallo para un estado plano de tensiones de acuerdo con el criterio de rotura de Mohr

Si para un determinado material solamente se dispone de los círculos de Mohr correspondientes a los estados últimos tensionales de tracción y compresión uniaxial, como se muestra en la Figura 5.11 a), la envolvente de Mohr puede aproximarse por rectas tangentes a dichos círculos. El correspondiente criterio de rotura en el plano de tensiones principales se muestra en la Figura 5.11 b).

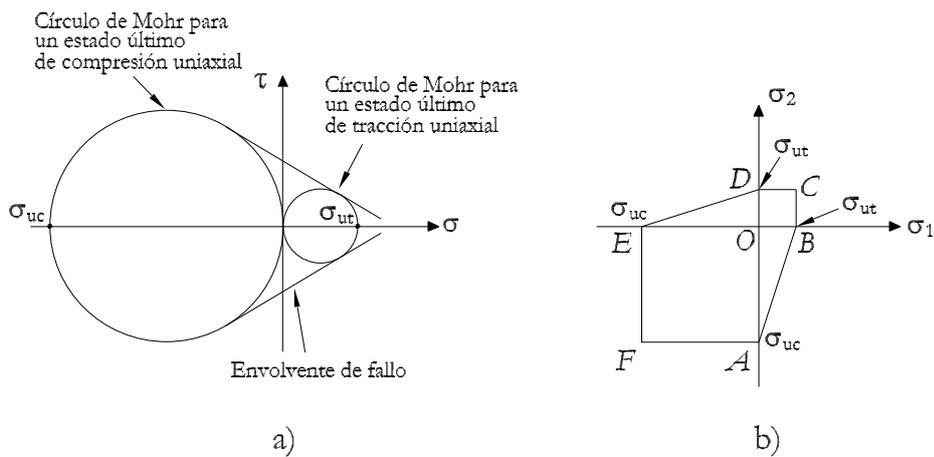


Figura 5.11 Envolvente de fallo simplificada para un estado plano de tensiones de acuerdo con el criterio de rotura de Mohr

Por tanto, el criterio de rotura de Mohr puede enunciarse como sigue: un sólido

sometido a un estado plano de tensiones rompe cuando las cargas actuantes alcanzan un valor tal que el punto representativo del estado tensional correspondiente caiga sobre el contorno definido por $ABCDEFA$ de los criterios de rotura mostrados en la Figura 5.10 b) y en la Figura 5.11 b).

Para materiales cuyas propiedades en tracción y compresión uniaxial sean las mismas, la geometría del criterio de Mohr es similar a la dada por el criterio de Tresca.

En la mayoría de los materiales cohesivos, como el hormigón, suelos o rocas, el criterio de rotura depende de la presión hidrostática. De forma que un incremento en la presión hidrostática de compresión produce un incremento en la capacidad del material de resistir las tensiones solicitadas sin romper. Es decir, se admite que la existencia de una presión hidrostática actuando sobre dichos materiales no provoca rotura de los mismos.

5.8 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.1

En un nudo de la estructura que se muestra en la Figura 5.12 se han colocado unas galgas en roseta con la estructura descargada.

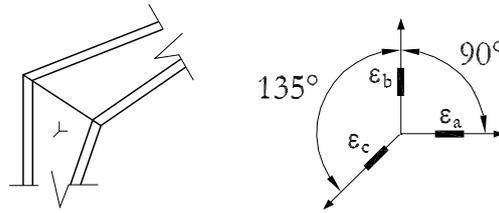


Figura 5.12 Disposición de galgas colocadas en un nudo

Cargada la estructura, se han obtenido los valores ε_a , ε_b y ε_c .

Determinar en el punto en estudio:

1. La tensión equivalente de Von-Mises
2. El coeficiente de seguridad

Datos:

$$\begin{aligned}\sigma_e &= 260 \text{ MPa} \\ \varepsilon_a &= 520 \cdot 10^{-6} \quad , \quad \varepsilon_b = 360 \cdot 10^{-6} \quad , \quad \varepsilon_c = -80 \cdot 10^{-6} \\ E &= 210 \text{ GPa} \quad , \quad \nu = 0,3\end{aligned}$$

Solución:

1. La tensión equivalente de Von-Mises

$$\sigma_{VM} = 191,2 \text{ MPa}$$

2. El coeficiente de seguridad

$$n = 1,36$$

Ejercicio 5.2

El tensor de tensiones en un punto P de un sólido elástico es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 50 & -170 \end{pmatrix}$$

Comprobar si dicho punto está plastificado según los criterios:

1. De Von-Mises
2. De Tresca

Datos:

$$E = 210 \text{ GPa} \quad , \quad \sigma_e = 260 \text{ MPa}$$

Solución:

1. Comprobar si dicho punto está plastificado según el criterio de Von-Mises.

$$\sigma_{VM} = 251,794 \text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{VM} < \sigma_e$$

por tanto, no hay plastificación.

2. Comprobar si dicho punto está plastificado según el criterio de Tresca.

$$\sigma_T = 287,924 \text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad \sigma_T > \sigma_e$$

por tanto, hay plastificación.

