

## Lección 3

# Tensiones

### Contenidos

---

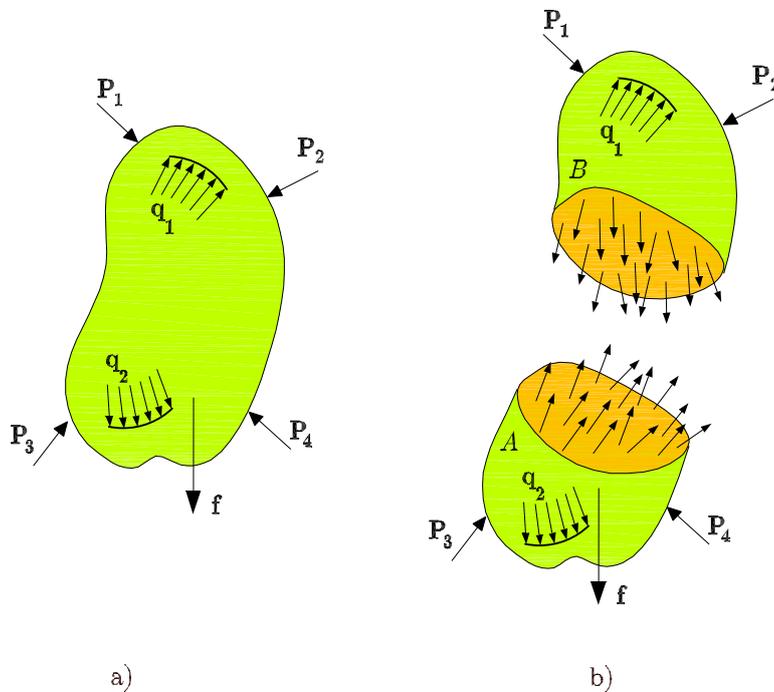
<b>3.1. Concepto de tensión . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>3.2. Componentes del vector tensión . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>3.3. Denominación de las tensiones. Criterio de signos . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>3.4. Fórmula de Cauchy. El tensor de tensiones . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>3.5. Ecuaciones de equilibrio interno . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>3.6. Cambio de sistema de referencia . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>3.7. Tensiones principales . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>3.8. Valores máximos de las componentes intrínsecas de la tensión . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>3.9. Tensión plana . . . . .</b>	<b>38</b>
3.9.1. Curvas representativas de un estado tensional plano . . . . .	40
<b>3.10. Representación del estado tensional en el entorno de un punto. Círculos de Mohr . . . . .</b>	<b>41</b>
3.10.1. Construcción del círculo de Mohr en tensión plana . . . . .	41
3.10.2. Construcción de los círculos de Mohr de un estado general de tensiones . . . . .	43
3.10.3. Cálculo gráfico de las componentes intrínsecas del vector tensión para una dirección dada . . . . .	44
<b>3.11. Ejercicios propuestos . . . . .</b>	<b>45</b>

---

### 3.1 Concepto de tensión

Al deformarse un sólido bajo la acción de unas cargas, la variación relativa de la distancia entre las partículas que lo constituyen no es indefinida debido a la acción de las fuerzas de atracción intermoleculares, a excepción de que se produzca la rotura del sólido.

Sea un sólido en equilibrio sometido a un sistema de fuerzas exteriores y a fuerzas por unidad de masa como se muestra en la Figura 3.1 a). Mediante un corte imaginario a dicho sólido por una superficie arbitraria, como el que se muestra en la Figura 3.1 b), se aísla un trozo de sólido. En el interior del sólido actúan las fuerzas por unidad de masa correspondientes. En el contorno actúan *fuerzas por unidad de superficie* que en la superficie de corte corresponden a la acción de cada una de las dos partes en que se divide el sólido sobre la otra. Por equilibrio, ambos conjuntos de fuerzas por unidad de superficie han de ser iguales y de sentidos contrarios.



**Figura 3.1** Concepto de tensión: a) sólido en equilibrio y b) sección de dicho sólido

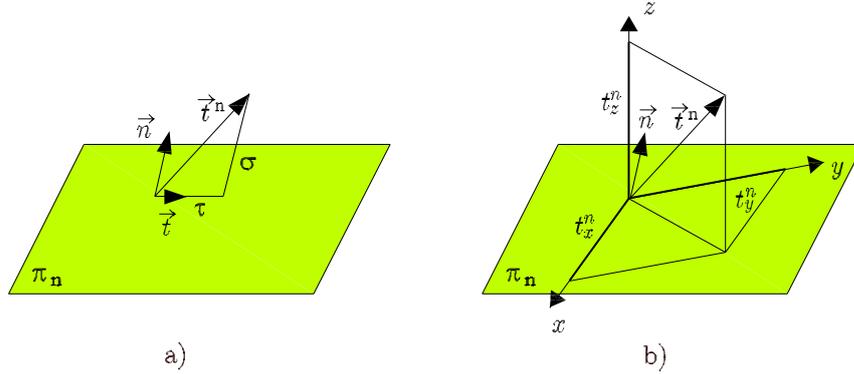
Estas fuerzas por unidad de superficie no son fuerzas actuantes sobre el exterior del sólido. Son fuerzas internas y resultantes a nivel macroscópico de las fuerzas intermoleculares que se oponen a las separaciones entre moléculas del sólido. No obstante, tanto las fuerzas por unidad de superficie que actúan en el exterior del sólido como estas fuerzas internas, tienen el mismo sentido físico: son fuerzas actuantes por unidad de superficie. Cada una de estas fuerzas recibe el nombre de vector tensión y se denota como  $\vec{t}$ .

En el contorno exterior del sólido, la superficie sobre la que actúan las fuerzas exteriores está perfectamente definida en cada punto del mismo (el vector normal al contorno en dicho punto es único) y la tensión es una función de punto  $\vec{t}(x, y, z)$ . Sin embargo, para caracterizar el vector tensión en un punto interior del sólido es

necesario indicar el plano de corte, tangente a dicho punto, utilizado. Este plano queda definido si se conoce su normal  $\vec{n}$ . Es pues una hipótesis aceptable considerar que el vector tensión asociado a un punto interior de un sólido elástico depende del punto considerado y de la normal en tal punto al plano tangente considerado  $\vec{t}^{\mathbf{n}}(x, y, z, \vec{n})$ . Ya que por un punto pasan infinitos planos, habrá infinitos vectores tensión asociados a un mismo punto. Cabe preguntarse ¿cómo es posible sacar conclusiones sobre el estado tensional en cualquier punto de un sólido, si la magnitud que lo define varía según el plano que se considere? ¿Existe alguna relación que ligue estos infinitos vectores tensión? En el desarrollo del tema se responderán estas cuestiones.

### 3.2 Componentes del vector tensión

Una descomposición habitual del vector tensión asociado a un punto de un sólido elástico, referido a un plano de normal  $\vec{n}$ , se realiza mediante la descomposición en sus componentes normal y tangencial, como se muestra en la Figura 3.2 a). La componente normal se denomina tensión normal  $\sigma$ , y la componente tangencial se denomina tensión tangencial  $\tau$ . Ambas reciben el nombre de componentes intrínsecas del vector tensión.



**Figura 3.2** Vector tensión. a) Componentes intrínsecas normal y tangencial. b) Componentes globales

La componente intrínseca normal  $\sigma$  es la proyección del vector tensión  $\vec{t}^{\mathbf{n}}$  sobre  $\vec{n}$ . De forma vectorial, se calcula mediante la expresión

$$\sigma = \vec{t}^{\mathbf{n}} \cdot \vec{n} \quad (3.1)$$

y de forma matricial, mediante la expresión

$$\sigma = \mathbf{n}^T \mathbf{t}^{\mathbf{n}} \quad (3.2)$$

La componente intrínseca tangencial  $\tau$  es la proyección del vector tensión  $\vec{t}^{\mathbf{n}}$  sobre el plano. De forma vectorial, se calcula mediante las expresiones

$$\tau = \vec{t}^{\mathbf{n}} \cdot \vec{t} \quad \text{o} \quad \tau = \left| \vec{t}^{\mathbf{n}} - \sigma \vec{n} \right| \quad (3.3)$$

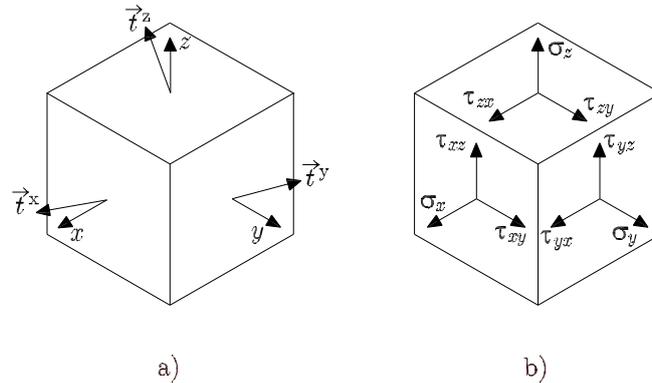
siendo  $\vec{t}$  el vector tangente al plano. En forma matricial,  $\tau$  se calcula mediante la expresión

$$\tau = \mathbf{t}^T \mathbf{t}^n \quad (3.4)$$

Las componentes del vector tensión en un sistema de coordenadas ortogonal, como el que se muestra en la Figura 3.2 b), reciben el nombre de componentes globales del vector tensión.

### 3.3 Denominación de las tensiones. Criterio de signos

Se considerará positivo el vector tensión con sentido hacia el exterior del sólido. En la Figura 3.3 a) se muestran las componentes globales de la tensión respecto a seis planos paralelos a los coordenados de un sistema cartesiano de ejes. El vector tensión se descompone en la dirección normal al plano y en dos direcciones perpendiculares entre sí, contenidas en el plano como se muestra en la Figura 3.3 b).



**Figura 3.3** Vectores tensión: a) direcciones y sentidos positivos, y b) componentes globales de los vectores tensión

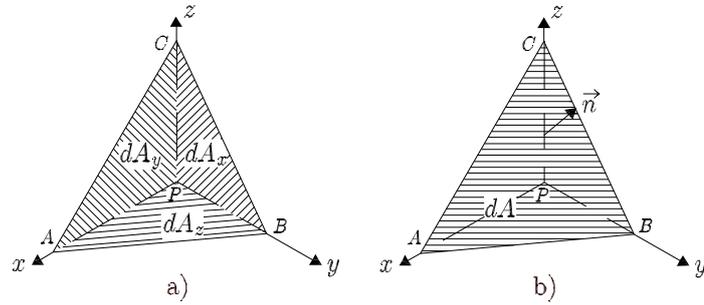
Se denotará a la componente normal al plano con  $\sigma$  y vendrá afectada del subíndice correspondiente al eje perpendicular al plano. Las componentes tangenciales se denotarán con  $\tau$  y vendrán afectadas de dos subíndices. El primero corresponde al eje perpendicular al plano donde está contenida y el segundo al eje al que es paralela. Debido al criterio de tensiones positivas, los valores positivos de las componentes de la tensión en las caras del primer octante (vistas) corresponden a sentidos positivos de los ejes cartesianos y en las caras ocultas a sentidos negativos de dichos ejes.

### 3.4 Fórmula de Cauchy. El tensor de tensiones

En el apartado 3.1 se afirmó que en un punto existen infinitos vectores tensión asociados a los infinitos planos que pasan por dicho punto. Surgía la pregunta de si existe alguna relación entre esos infinitos vectores tensión. Tal relación existe y viene dada por la fórmula de Cauchy.

Para deducir la fórmula de Cauchy, se parte de un tetraedro infinitesimal en el entorno de un punto  $P$ . Tres de las caras son paralelas a los planos coordenados y

se cortan en el punto  $P$ , Figura 3.4 a), y la otra cara viene definida por un plano inclinado de normal  $\vec{n}$ , Figura 3.4 b).

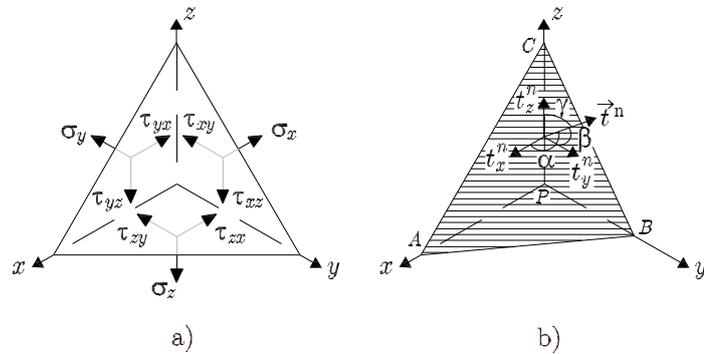


**Figura 3.4** Tetraedro infinitesimal formado por a) caras paralelas a los planos coordenados y b) un plano de normal  $\vec{n}$

Si el área de la superficie de normal  $\vec{n}$  comprendida en el primer octante es  $dA$ , las áreas de las otras tres superficies que forman el tetraedro serán

$$\begin{aligned} dA_x &= dA \cos \alpha = dA l \\ dA_y &= dA \cos \beta = dA m \\ dA_z &= dA \cos \gamma = dA n \end{aligned} \quad (3.5)$$

siendo  $l$ ,  $m$  y  $n$  los cosenos directores de  $\vec{n}$ .



**Figura 3.5** a) Tensiones sobre las caras del tetraedro. b) Vector tensión sobre el plano de normal  $\vec{n}$

Estableciendo el equilibrio de fuerzas en dirección  $x$ , Figuras 3.5 a) y b), se obtiene

$$-\sigma_x dA_x + (-\tau_{yx}) dA_y + (-\tau_{zx}) dA_z + t_x^n dA + b_x dV = 0 \quad (3.6)$$

donde  $b_x$  es la componente en  $x$  de las fuerzas por unidad de volumen.

Sustituyendo las expresiones (3.5) en la ecuación (3.6), se obtiene

$$-\sigma_x dA l + (-\tau_{yx}) dA m + (-\tau_{zx}) dA n + t_x^n dA + b_x dV = 0 \quad (3.7)$$

Dividiendo por  $dA$  y despreciando las fuerzas por unidad de volumen frente a las fuerzas por unidad de superficie, la ecuación de equilibrio de fuerzas en dirección  $x$ , es

$$\sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = t_x^n \quad (3.8)$$

Planteando el equilibrio de fuerzas en las direcciones  $y$  y  $z$ , se obtienen las ecuaciones

$$\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n = t_y^n \quad (3.9)$$

$$\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = t_z^n \quad (3.10)$$

Estas tres ecuaciones se pueden expresar en forma matricial expandida como

$$\begin{pmatrix} t_x^n \\ t_y^n \\ t_z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

o bien, en forma matricial compacta

$$\mathbf{t}^n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (3.12)$$

A  $\boldsymbol{\sigma}$ , que contiene los valores de las componentes de las tensiones en cada plano, se le denomina tensor de tensiones.

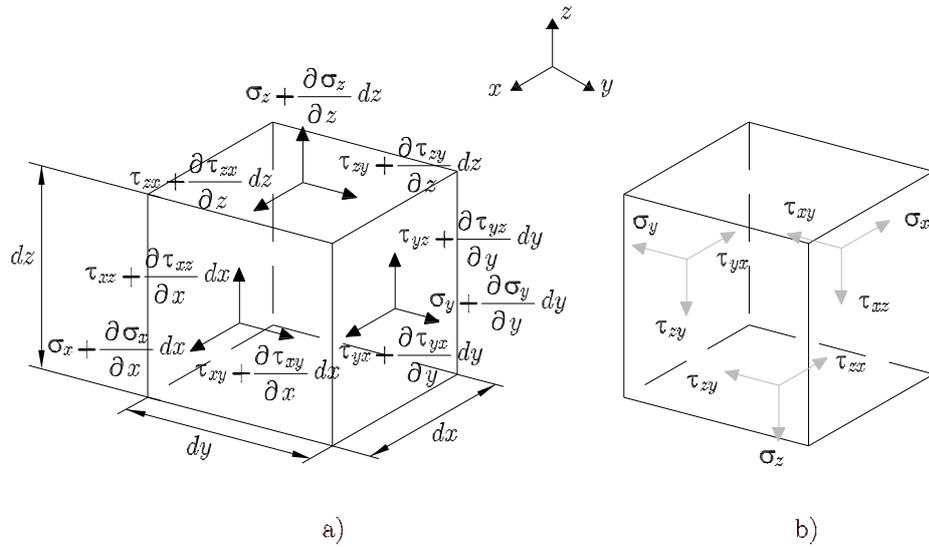
Las expresiones (3.11) y (3.12), indican que el vector tensión  $\vec{t}^n$  ( $\mathbf{t}^n$ ) correspondiente a un plano de normal  $\vec{n}$  ( $\mathbf{n}$ ) se obtiene multiplicando el tensor de tensiones por el vector unitario normal a dicho plano. Por consiguiente, el estado tensional en el interior de un sólido es conocido si lo es, en todos sus puntos, el tensor de tensiones.

### 3.5 Ecuaciones de equilibrio interno

Para su deducción se considerará el equilibrio de un elemento diferencial en el entorno de un punto interior de un sólido elástico, formado por un paralelepípedo infinitesimal cuyas caras son paralelas a los planos coordenados. Las tensiones que actúan sobre cada una de las caras se muestran en las Figuras 3.6 a) y b).

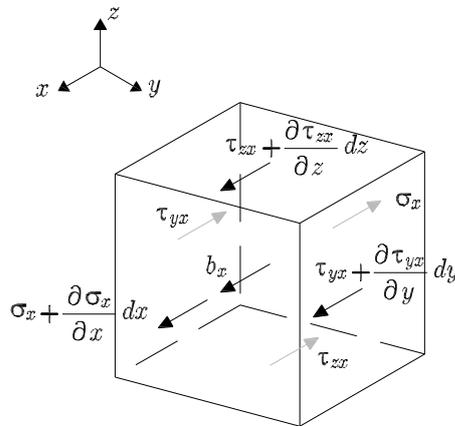
Se admite que las componentes de las tensiones son funciones continuas de las coordenadas del punto en que actúan (hipótesis de *medio continuo*) y que sus incrementos se pueden poner en función de las derivadas primeras de las componentes respecto a dichas coordenadas (hipótesis de *pequeñas deformaciones*). Si en la cara  $x = c$  actúa la tensión normal  $\sigma_x$ , en la cara  $x = c + dx$  actuará la tensión  $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ . Sobre el elemento diferencial también actuarán las fuerzas de volumen  $b_x$ ,  $b_y$  y  $b_z$ .

Para que el elemento esté en equilibrio deben ser nulos los sumatorios de las proyecciones sobre cada uno de los tres ejes de todas las fuerzas actuantes y los sumatorios de momentos de todas las fuerzas respecto a cada eje.



**Figura 3.6** Tensiones sobre las caras del paralelepípedo elemental: a) caras vistas y b) caras ocultas

Considerando positivo el sentido de los ejes que se muestra en la Figura 3.7, el equilibrio de fuerzas en la dirección del eje  $x$  será:



**Figura 3.7** Tensiones que intervienen en el equilibrio de fuerzas en dirección del eje  $x$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz \right] + \\
 & \left[ \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz \right] + \\
 & \left[ \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy \right] + b_x dx dy dz = 0
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Planteando el equilibrio en las otras dos direcciones, se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx dz - \sigma_y dx dz \right] + \\
& \left[ \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{xy} dy dz \right] + \\
& \left[ \left( \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zy} dx dy \right] + b_y dx dy dz = 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dx dy - \sigma_z dx dy \right] + \\
& \left[ \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{xz} dy dz \right] + \\
& \left[ \left( \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yz} dx dz \right] + b_z dx dy dz = 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Dividiendo las expresiones (3.13), (3.14) y (3.15) por  $dx dy dz$ , queda el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

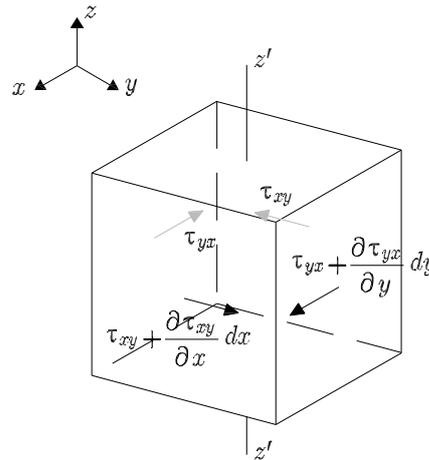
que son las ecuaciones de equilibrio interno en un paralelepípedo elemental, y relacionan las tensiones con las fuerzas de volumen o de masa. Las condiciones de equilibrio planteadas en (3.13), (3.14) y (3.15) son necesarias pero no suficientes. Para que el paralelepípedo esté en equilibrio estático es necesario que exista equilibrio de momentos.

Tomando momentos respecto a un eje paralelo  $z'$ , paralelo al  $z$ , que pase (para mayor comodidad) por el centro del paralelepípedo, las componentes que contribuyen al equilibrio de momentos respecto a este eje se muestran en la Figura 3.8.

Se debe tener en cuenta que las componentes normales de la tensión se cortan o son coincidentes con el eje  $z'$ , por lo que no producen momentos. Así mismo, tampoco producen momentos las componentes tangenciales de la tensión paralelas o que cortan al eje. Las tres componentes de las fuerzas de volumen, supuestamente localizadas en el centro del paralelepípedo, también cortan al eje y no producen momentos. La condición de equilibrio de momentos respecto al eje considerado es, por tanto:

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dx}{2} - \\
\tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} - \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} = 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Tomando momentos respecto a otros dos ejes, paralelos al  $x$  e  $y$  de referencia, que pasen por el centro del paralelepípedo, se obtienen las ecuaciones de equilibrio



**Figura 3.8** Tensiones que intervienen en el equilibrio de momentos alrededor de un eje perpendicular al plano  $xy$  que pasa por el centro del paralelepípedo

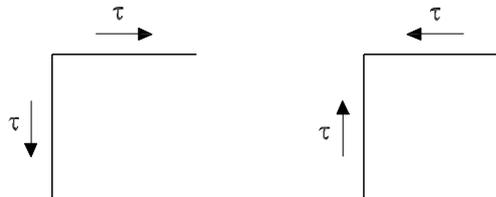
$$\tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} + \left( \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} - \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} - \left( \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dz}{2} = 0 \tag{3.18}$$

$$\tau_{xz} dy dz \frac{dx}{2} + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dx}{2} - \tau_{zx} dx dy \frac{dz}{2} - \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dz}{2} = 0 \tag{3.19}$$

Dividiendo las expresiones (3.17), (3.18) y (3.19) por  $dx dy dz$ , se obtiene

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \tag{3.20}$$

Estas igualdades expresan matemáticamente el Teorema de Reciprocidad de las Tensiones tangenciales: *las componentes de las tensiones tangenciales en un punto correspondientes a dos planos perpendiculares, en la dirección normal a la arista de su diedro, son iguales*. El sentido de dichas componentes es tal que considerando un diedro recto, ambas se dirigen hacia la arista o ambas se separan, como se muestra en la Figura 3.9.



**Figura 3.9** Sentido de las tensiones tangenciales

A partir de estos resultados se puede afirmar que el tensor de tensiones es simétrico, quedando de la forma

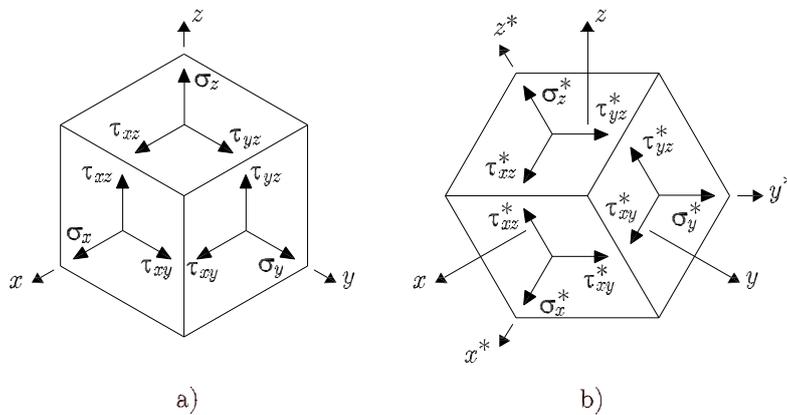
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

### 3.6 Cambio de sistema de referencia

Conocido el tensor de tensiones, el vector tensión  $\vec{t}^{\vec{n}}$  sobre un plano de normal  $\vec{n}$  viene dado por la fórmula de Cauchy (en notación matricial)

$$\mathbf{t}^{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

Las componentes del tensor de tensiones están referidas a un sistema de referencia  $xyz$  como se muestra en la Figura 3.10 a).



**Figura 3.10** a) Componentes de la tensión referidas a un sistema  $xyz$ . b) Componentes de la tensión referidas a un sistema  $x^*y^*z^*$

Se considerará un nuevo sistema de referencia ortogonal con el mismo origen que el anterior, pero con distinta orientación como se muestra en la Figura 3.10 b). ¿Cuáles serán las componentes del tensor de tensiones en este nuevo sistema?

En lo que sigue de apartado se utilizará notación matricial. Sea  $\boldsymbol{\sigma}^*$  el tensor de tensiones referido a este nuevo sistema. El vector tensión  $\mathbf{t}^{\mathbf{n}^*}$ , correspondiente a un plano cuya orientación viene definida por el vector unitario  $\mathbf{n}^*$ , es

$$\mathbf{t}^{\mathbf{n}^*} = \boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{n}^* \quad (3.22)$$

Los vectores tensión en ambos sistemas, referidos al mismo plano, están relacionados mediante la matriz de rotación de ejes  $\mathbf{R}$  por la ecuación

$$\mathbf{t}^{\mathbf{n}^*} = \mathbf{R} \mathbf{t}^{\mathbf{n}} \quad (3.23)$$

Las filas de la matriz de rotación de ejes son los cosenos de los ángulos formados por cada eje nuevo con los antiguos, medidos en sentido antihorario del antiguo al nuevo sistema,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{xx^*} & \cos \theta_{yx^*} & \cos \theta_{zx^*} \\ \cos \theta_{xy^*} & \cos \theta_{yy^*} & \cos \theta_{zy^*} \\ \cos \theta_{xz^*} & \cos \theta_{yz^*} & \cos \theta_{zz^*} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Las componentes de los vectores unitarios en ambos sistemas de referencia están ligadas por la relación

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{R} \mathbf{n} \quad (3.25)$$

Al ser la matriz de cambio de ejes ortogonal (por pasar de un sistema de coordenadas ortogonal dextrógiro a otro sistema de coordenadas ortogonal dextrógiro), su inversa es igual a la traspuesta,  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ . Por tanto, se cumple

$$\mathbf{n} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{n}^* = \mathbf{R}^T \mathbf{n}^* \quad (3.26)$$

La expresión (3.25), teniendo en cuenta la fórmula de Cauchy y la ecuación (3.26), se expresa como

$$\mathbf{t}^{\mathbf{n}^*} = \mathbf{R} \mathbf{t}^{\mathbf{n}} = \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^T \mathbf{n}^* \quad (3.27)$$

Sustituyendo (3.22) en (3.27)

$$\boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{n}^* = \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^T \mathbf{n}^* \quad (3.28)$$

y dividiendo por  $\mathbf{n}^*$ , se obtiene la relación que liga  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\sigma}^*$

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^T \quad (3.29)$$

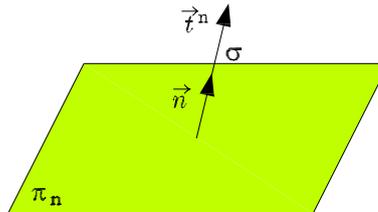
La ecuación (3.29) permite obtener el tensor de tensiones en cualquier sistema de referencia conocidos el tensor en otro sistema de referencia y la matriz de rotación de ejes entre ambos sistemas.

### 3.7 Tensiones principales

Mediante la fórmula de Cauchy en forma matricial

$$\mathbf{t}^{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

conocido el tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$ , se obtiene el vector tensión correspondiente a un determinado plano multiplicando el tensor de tensiones por el vector unitario  $\vec{n}$  normal a dicho plano.



**Figura 3.11** Vector tensión coincidente con la normal al plano

Si la dirección del vector normal y del vector tensión coinciden, Figura 3.11, la componente intrínseca tangencial es nula, existiendo solamente componente intrínseca normal. En este caso, se verifica, continuando en notación matricial

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \sigma \mathbf{n} = \sigma \mathbf{I} \mathbf{n} \quad (3.30)$$

o bien, pasando al primer miembro

$$[\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}] \mathbf{n} = 0 \quad (3.31)$$

siendo  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones,  $\mathbf{I}$  la matriz identidad y  $\sigma$  el módulo de la tensión normal. Por tanto,

$$\sigma \mathbf{I} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

La ecuación (3.31) es un sistema de tres ecuaciones algebraicas homogéneas lineales, con los cosenos directores  $(l, m, n)$  como incógnitas. Además, las incógnitas deben satisfacer, por el carácter unitario del vector normal, la ecuación

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (3.33)$$

Desarrollando la ecuación (3.31), se tiene

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n = 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Los tres cosenos directores no pueden ser todos cero, ya que deben satisfacer la ecuación (3.33). Para que un sistema de ecuaciones homogéneas lineales tenga solución distinta de la trivial, es condición necesaria y suficiente que el determinante de la matriz de coeficientes sea igual a cero

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (3.35)$$

Al desarrollar este determinante se obtiene una ecuación cúbica, denominada *ecuación característica*

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0 \quad (3.36)$$

siendo

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (3.37)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} \quad (3.38)$$

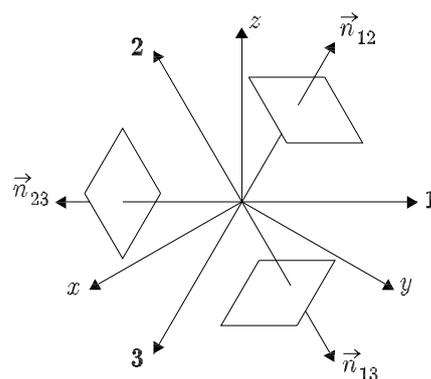
$$I_3 = |\boldsymbol{\sigma}| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (3.39)$$

Las raíces de la ecuación característica (los valores propios de  $\sigma$ ) reciben el nombre de *tensiones principales*. Se denominan  $\sigma_i$ , siendo  $i=1,2,3$ . Las direcciones correspondientes de las tensiones principales (los vectores propios de  $\sigma$ ) reciben el nombre de *direcciones principales*. Se convendrá que  $\sigma_1$  es la raíz mayor (algebraicamente) y  $\sigma_3$  la menor. En todo punto interior de un sólido elástico existen, si el determinante de la matriz de tensiones es distinto de cero, tres direcciones ortogonales entre sí, que son las direcciones de las tensiones principales. Los valores de las tensiones principales son independientes del sistema de referencia adoptado, y son los valores máximos y mínimos que pueden adoptar las componentes del vector tensión en el entorno del punto considerado. Esto implica que las raíces de la ecuación característica son invariantes. Esta afirmación responde a la primera de las preguntas planteadas en el último párrafo del apartado 3.1, concretamente, cómo era posible obtener información del estado tensional de un sólido si la magnitud que lo define varía según el plano que se considere.

Puesto que las raíces de la ecuación característica (las tensiones principales) no dependen de la elección del sistema de referencia, los coeficientes de dicha ecuación tampoco dependen del sistema de referencia. Así pues, las expresiones de  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  son escalares invariantes, concretamente, se denominan invariante lineal, invariante cuadrático e invariante cúbico, respectivamente.

### 3.8 Valores máximos de las componentes intrínsecas de la tensión

Los valores máximos de las tensiones normales son las tensiones principales y corresponden a planos perpendiculares a las direcciones principales (planos de tensión tangencial nula). Al ordenar las tensiones principales tal que se cumpla que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , la mayor tensión de tracción (o mínima de compresión) corresponde al plano principal 1, y la mínima tensión de tracción (o máxima de compresión) corresponde al plano principal 3.



**Figura 3.12** Normales de los planos de tensión tangencial máxima

Los valores máximos de la tensión tangencial corresponden a planos cuyas normales coinciden con las bisectrices de los ángulos rectos que forman las direcciones principales dos a dos, como se muestra en la Figura 3.12. La máxima de todas, de acuerdo con el criterio de ordenación de las tensiones principales adoptado, se produce según

la bisectriz de las direcciones principales 1 y 3, y su valor es

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3.40)$$

Los otros valores máximos de las tensiones tangenciales son

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (3.41)$$

$$\tau_{23} = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} \quad (3.42)$$

### 3.9 Tensión plana

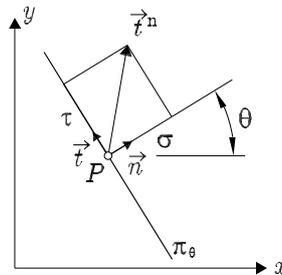
Un sólido está sometido a tensión plana si todas las componentes de la tensión se encuentran en un mismo plano. Si el plano considerado es el  $xy$ , se verifica que  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , y el tensor de tensiones es

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Mediante la fórmula de Cauchy

$$\mathbf{t}^n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

es posible conocer las componentes del vector tensión en un punto  $P$  respecto a cualquier plano cuya normal  $\vec{n}$  forme un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ , tal y como se muestra en la Figura 3.13.



**Figura 3.13** Componentes intrínsecas del vector tensión en un punto respecto a un plano de normal  $\vec{n}$

La fórmula de Cauchy en forma expandida es

$$\begin{pmatrix} t_x^n \\ t_y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Las componentes globales del vector tensión son

$$\begin{aligned} t_x^n &= \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \text{sen } \theta \\ t_y^n &= \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \text{sen } \theta \end{aligned} \quad (3.45)$$

La componente intrínseca normal  $\sigma$  es

$$\begin{aligned}
\sigma &= \mathbf{n}^T \mathbf{t}^n = \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \text{sen } \theta \\ \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \text{sen } \theta \end{pmatrix} = \\
&= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \text{sen}^2 \theta + 2\tau_{xy} \text{sen } \theta \cos \theta
\end{aligned} \tag{3.46}$$

y la componente intrínseca tangencial  $\tau$

$$\begin{aligned}
\tau &= \mathbf{t}^T \mathbf{t}^n = \\
&= \begin{pmatrix} -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \text{sen } \theta \\ \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \text{sen } \theta \end{pmatrix} = \\
&= -\sigma_x \cos \theta \text{sen } \theta + \sigma_y \cos \theta \text{sen } \theta - \tau_{xy} \text{sen}^2 \theta + \tau_{xy} \cos^2 \theta
\end{aligned} \tag{3.47}$$

siendo

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \cos(90 + \theta) & \cos \theta \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^T$$

Mediante las siguientes relaciones trigonométricas

$$\begin{aligned}
\cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\
\text{sen}^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\
\text{sen } 2\theta &= 2 \text{sen } \theta \cos \theta \\
\cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta
\end{aligned}$$

las componentes intrínsecas normal y tangencial se pueden expresar como

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \text{sen } 2\theta \tag{3.48}$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{sen } 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \tag{3.49}$$

Dejando a un mismo lado de la igualdad los coeficientes multiplicados por funciones trigonométricas, las ecuaciones (3.48) y (3.49) quedan como

$$\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \text{sen } 2\theta \tag{3.50}$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{sen } 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \tag{3.51}$$

Si el plano de referencia fuera principal, se verificaría que  $\tau = 0$ . Así, igualando a cero la ecuación (3.51) se obtiene el ángulo  $\theta$  que forma la dirección principal  $\mathbf{1}$  con el eje  $x$

$$\tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \tag{3.52}$$

### 3.9.1 Curvas representativas de un estado tensional plano

Es posible representar gráficamente algunas características que definen un estado tensional plano mediante una serie de curvas, algunas de las cuales se definen a continuación.

#### Líneas isostáticas

Las líneas isostáticas son las envolventes de las tensiones principales. Hay dos familias de estas curvas, cada una de las cuales corresponde a una de las tensiones principales. Por cada punto pasan dos isostáticas, una de cada familia, que son ortogonales entre sí.

Las ecuaciones de las isostáticas se obtienen a partir de la ecuación

$$\tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad (3.53)$$

siendo  $\theta$  el ángulo que forma la dirección principal 1 con la dirección positiva del eje  $x$ . Por tanto, se verifica

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad (3.54)$$

Sustituyendo (3.54) en (3.53), se obtiene

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\tau_{xy}} \frac{dy}{dx} - 1 = 0 \quad (3.55)$$

que es una ecuación de segundo grado en  $\frac{dy}{dx}$ , cuyas raíces son

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2 + 1} \quad (3.56)$$

Las isostáticas son de gran utilidad en el diseño de elementos de hormigón armado, ya que las armaduras de acero que cosen las fisuras que las tracciones originan en el hormigón deberían colocarse coincidentes con la familia de isostáticas correspondientes a la tensión principal 1.

#### Líneas isobaras

Las líneas isobaras unen puntos de igual valor de las tensiones principales correspondientes a cada familia de isostáticas. Las expresiones analíticas son

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = k_1 \quad (3.57)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = k_2 \quad (3.58)$$

### Líneas de máxima tensión cortante

Son las envolventes de las direcciones para las que la tensión tangencial es máxima en cada punto. Forman dos familias de curvas ortogonales que cortan a  $45^\circ$  a las isostáticas.

Las ecuaciones de estas curvas se obtienen a partir de la ecuación

$$\tan 2\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad (3.59)$$

como

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo esta expresión en (3.59), se obtiene

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{4\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \frac{dy}{dx} - 1 = 0 \quad (3.60)$$

que es una ecuación de segundo grado en  $\frac{dy}{dx}$ , cuyas raíces son

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \pm \sqrt{\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)^2 + 1} \quad (3.61)$$

## 3.10 Representación del estado tensional en el entorno de un punto. Círculos de Mohr

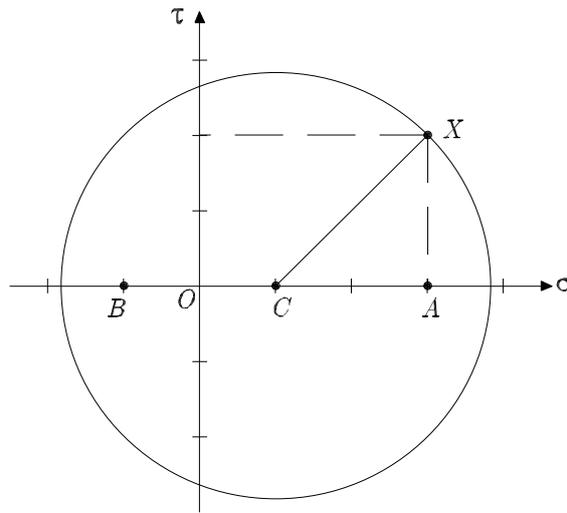
Los círculos de Mohr permiten de forma gráfica resolver problemas de tensión plana y de estados generales de tensiones.

### 3.10.1 Construcción del círculo de Mohr en tensión plana

Se utilizará el siguiente criterio: una componente normal o tangencial de tensión será positiva siempre que actúe sobre la cara positiva del elemento en la dirección positiva de los ejes (en la dirección negativa de los ejes sobre la cara negativa del elemento).

El círculo de Mohr se construye sobre un sistema de ejes de abscisa  $\sigma$  y de ordenada  $\tau$ , como se muestra en la Figura 3.14. Para su trazado, se siguen los siguientes pasos:

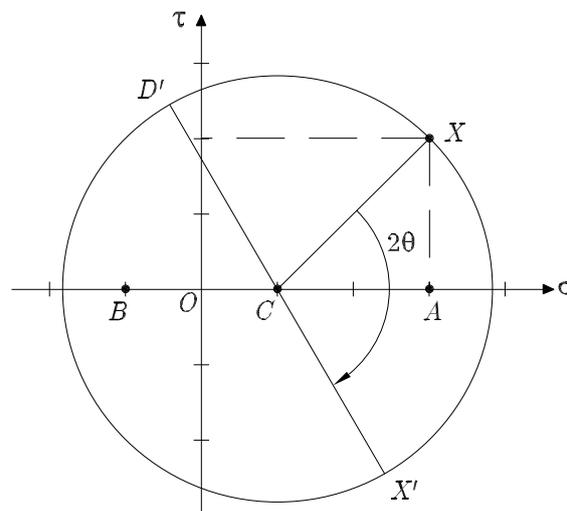
1. Se representan los puntos  $A(\sigma_x, 0)$ ,  $B(\sigma_y, 0)$ ,  $C\left[\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right]$  y  $X(\sigma_x, \tau_{xy})$
2. Se traza la línea  $CX$ . Esta es la línea de referencia correspondiente a un plano en el cuerpo elástico cuya normal es la dirección  $x$  positiva.
3. Con centro en  $C$  y radio  $R = CX$  se traza una circunferencia



**Figura 3.14** Construcción del círculo de Mohr

### Solución gráfica para tensiones sobre un plano inclinado

Si se conocen las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  en un sistema  $xy$ , las tensiones  $\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$  y  $\tau'_{xy}$  en cualquier plano inclinado que forme un ángulo  $\theta$  con la dirección positiva del eje  $x$ , pueden obtenerse gráficamente siguiendo el procedimiento que se muestra en la Figura 3.15 como sigue:



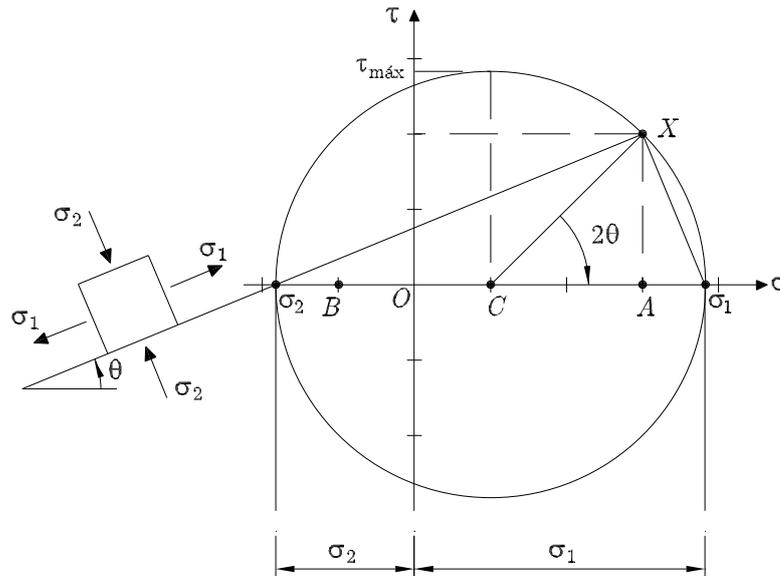
**Figura 3.15** Solución gráfica para tensiones sobre un plano inclinado

1. Se traza el círculo de Mohr según se ha descrito en el apartado anterior.
2. Para encontrar el punto sobre la circunferencia de Mohr que represente un plano en el cuerpo elástico cuya normal está girada un ángulo  $\theta$  (en sentido antihorario) respecto del eje  $x$ , hay que girar un ángulo  $2\theta$  (en sentido horario)

a partir de la línea  $CX$ . El punto  $X'$  de intersección de la recta girada con la circunferencia es el punto buscado, cuyas coordenadas son  $(\sigma'_x, \tau'_{xy})$ .

3. La abscisa del punto  $D'$ , que está en el extremo opuesto del diámetro que pasa por  $X'$  es  $\sigma'_y$ , siendo las coordenadas del punto  $(\sigma'_y, -\tau'_{xy})$ .

### Solución gráfica para el cálculo de tensiones y direcciones principales



**Figura 3.16** Solución gráfica para el cálculo de tensiones y direcciones principales

La Figura 3.16 muestra un procedimiento sencillo para determinar gráficamente las tensiones y las direcciones principales de un estado tensional conocido. El círculo de Mohr se construye como se indicó anteriormente.

Por definición, en los planos principales, la componente intrínseca tangencial es nula. Los puntos de intersección del círculo de Mohr con el eje de abscisas son puntos de componente  $\tau = 0$ . Por tanto, representan el valor de las tensiones principales. La tensión tangencial máxima corresponde al radio del círculo.

Para obtener las direcciones principales se dibujan líneas desde el punto  $X$  a los puntos  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . La línea  $X\sigma_1$  es paralela al plano del cuerpo elástico sobre el que actúa la tensión  $\sigma_1$ , mientras que la línea  $X\sigma_2$  es paralela al plano del cuerpo elástico sobre el que actúa la tensión  $\sigma_2$ . Téngase en cuenta que  $\theta$  es el ángulo de inclinación de la normal del plano sobre el que actúa  $\sigma_1$ , y no la inclinación del plano.

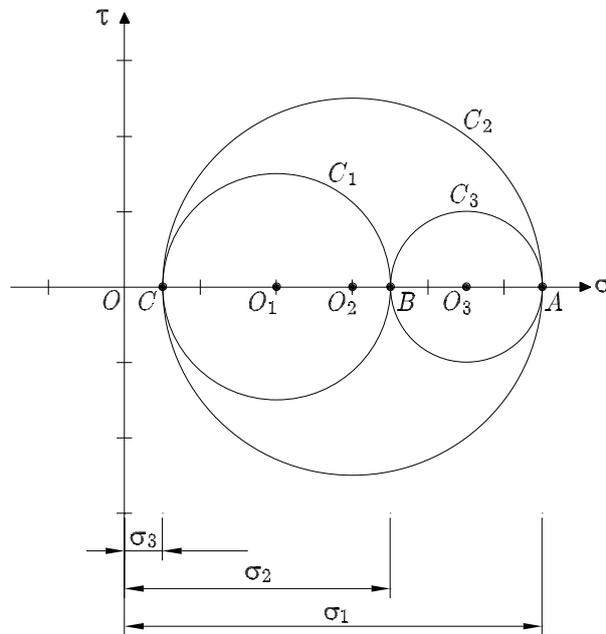
#### 3.10.2 Construcción de los círculos de Mohr de un estado general de tensiones

Para construir los círculos de Mohr de un estado general de tensiones es necesario referir el tensor de tensiones al sistema de ejes principales. Es decir, el tensor de tensiones debe tener la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

El método gráfico se muestra en la Figura 3.17 siguiendo estos pasos:

1. Situar en abscisas los puntos  $A(\sigma_1, 0)$ ,  $B(\sigma_2, 0)$  y  $C(\sigma_3, 0)$ .
2. Construir las circunferencias  $C_1$  con centro  $O_1\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right)$  y radio  $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ ,  $C_2$  con centro  $O_2\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right)$  y radio  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ , y  $C_3$  con centro  $O_3\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$  y radio  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ .



**Figura 3.17** Construcción de los círculos de Mohr de un estado general de tensiones

Un estado tensional es posible si las componentes intrínsecas correspondientes son interiores a  $C_2$  (o caen sobre  $C_2$ ) y exteriores a  $C_1$  y  $C_3$  (o caen sobre  $C_1$  o  $C_3$ ).

### 3.10.3 Cálculo gráfico de las componentes intrínsecas del vector tensión para una dirección dada

Para resolver el problema gráficamente es necesario que tanto el tensor de tensiones como el vector que define la dirección en la que se van a determinar las componentes intrínsecas, estén referidos al sistema de ejes principales. Además, dicho vector debe ser unitario. La Figura 3.18 muestra el método gráfico, que consiste en los siguientes pasos:

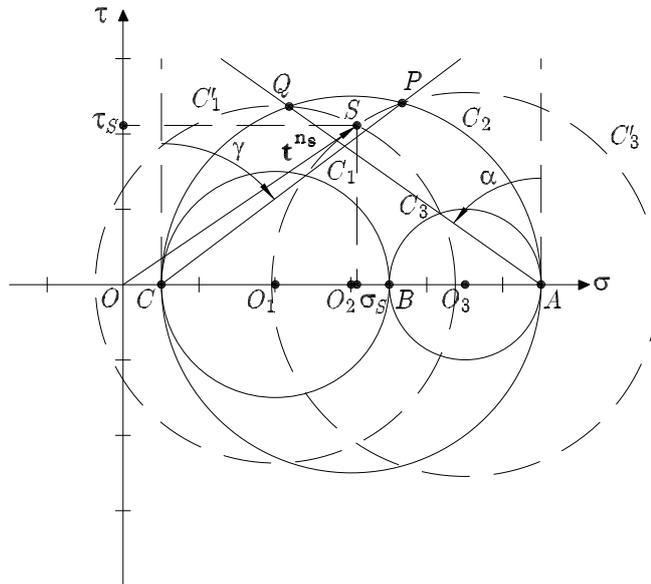
1. Construcción de los círculos de Mohr como se indicó en el apartado anterior (el punto correspondiente a las componentes intrínsecas debe ser exterior a las circunferencias primera y tercera, e interior a la segunda, o bien, se hallará en alguna de las tres).
2. Usando los datos de  $l$  y  $n$ , se trazan por los puntos correspondientes a  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  del eje de abscisas, las rectas inclinadas mostradas en la Figura 3.18, cuyos ángulos con la dirección del eje de ordenadas son, respectivamente

$$\alpha = \arccos l$$

$$\gamma = \arccos n$$

Estas rectas cortan a la circunferencia  $C_2$  en los puntos  $P$  y  $Q$

3. Se trazan sendas circunferencias con centros en  $O_1$  y  $O_3$ , que pasen por  $Q$  y  $P$ , respectivamente
4. El punto  $S$  de intersección de ambas circunferencias es el extremo del vector tensión buscado. Sus proyecciones sobre el sistema  $\sigma$ - $\tau$  son las componentes intrínsecas



**Figura 3.18** Construcción de los círculos de Mohr de un estado general de tensiones

### 3.11 Ejercicios propuestos

#### Ejercicio 3.1

Conocido el tensor de tensiones en el entorno de un punto de un sólido elástico, se pide:

1. Calcular las componentes globales respecto a un plano que contiene al eje  $x$  y su traza es bisectriz del plano  $yz$
2. Calcular las componentes intrínsecas del vector tensión referido al plano definido en el apartado anterior

**Datos:**

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo MPa las unidades de la tensión  $\sigma$ .

**Solución:**

1. Calcular las componentes globales respecto a un plano que contiene al eje  $x$  y su traza es bisectriz del plano  $yz$

$$\mathbf{t}^n = \begin{pmatrix} t_x^n \\ t_y^n \\ t_z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -2\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

2. Calcular las componentes intrínsecas del vector tensión referido al plano definido en el apartado anterior

$$\sigma = 2,5 \text{ MPa}$$

$$\tau = 3,8406 \text{ MPa}$$

### Ejercicio 3.2

Conocido el tensor de tensiones en un punto de un sólido elástico, se pide calcular:

1. Los planos de tensión normal máxima
2. La normal unitaria del plano libre de tensiones

**Datos:**

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo las unidades de la tensión  $\sigma$  MPa.

**Solución:**

1. Los planos de tensión normal máxima

$$\mathbf{n}_1 = \left( \pm \frac{2}{\sqrt{6}} \quad \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^T$$

$$\mathbf{n}_2 = \left( \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T$$

$$\mathbf{n}_3 = \left( 0 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T$$

2. La normal unitaria del plano libre de tensiones

$$\mathbf{n} = \left( \mp \frac{2}{\sqrt{6}} \quad \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^T$$

**Ejercicio 3.3**

Conocido el tensor de tensiones en un punto de un sólido elástico, se pide

1. Calcular las componentes del tensor de tensiones respecto a un sistema de ejes generado al girar  $60^\circ$  los ejes  $x$  e  $y$  alrededor del eje  $z$ , en sentido antihorario, manteniendo este último fijo

**Datos:**

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

siendo MPa las unidades de la tensión  $\sigma$ .

**Solución:**

1. Calcular las componentes del tensor de tensiones respecto a un sistema de ejes generado al girar  $60^\circ$  los ejes  $x$  e  $y$  alrededor del eje  $z$ , en sentido antihorario, manteniendo este último fijo

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \begin{pmatrix} \frac{-4 + \sqrt{3}}{2} & \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2} & \frac{-1 + 3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1 + 3\sqrt{3}}{2} & \frac{3 + \sqrt{3}}{2} & -3 \end{pmatrix}$$

