Lección 1

Introducción a la Elasticidad y Resistencia de Materiales

Contenidos

1.1 Mecánica del Sólido Rígido y Mecánica del Sólido Deformable

La Mecánica, que proviene de la palabra *mechanica* en latín que significa arte de construir una máquina, es la rama de la física que estudia y analiza el movimiento y reposo de los cuerpos, y su evolución en el tiempo, bajo la acción de fuerzas. Las hipótesis básicas de la Mecánica de sólidos se enumeran a continuación:

1. *Se consideran las ecuaciones de la Mecánica de Newton*
2. *El sólido es un medio continuo*
3. *Se cumplen las leyes básicas de la Termodinámica* (conservación de la energía y producción de entropía)

La segunda hipótesis implica que el sólido no tiene discontinuidades a nivel microscópico como consecuencia de la distribución molecular de cada material. Es decir, se ignora la existencia de estructuras a nivel microscópico (moleculares, atómicas, cristalinas o granulares), considerando que el comportamiento a nivel macroscópico es independiente de tal estructura (salvo a través de relaciones experimentales que se traducen en la relación de comportamiento). Esta hipótesis se justifica por las pequeñas dimensiones de los constituyentes microscópicos (moléculas, cristales o granos) en comparación con las dimensiones significativas del sólido (distribución de los apoyos o de las cargas y dimensiones propias del sólido) y permite trabajar con un espacio continuo y utilizar las herramientas que proporciona el análisis diferencial.

1.1.1 Sólido Rígido

Si un sólido sometido a un conjunto de fuerzas alcanza el equilibrio sin sufrir modificaciones de su forma original, o dichas modificaciones son despreciables respecto a su movimiento, se denomina *Sólido Rígido*. Un Sólido Rígido se caracteriza por una distribución continua de la materia y por la invariabilidad de las distancias relativas entre cualesquiera de los puntos que lo constituyen. Las ecuaciones de la estática, de la cinemática y de la dinámica son suficientes para definir el comportamiento de este tipo de sólidos.

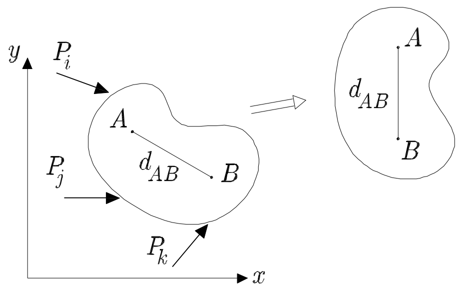

Figura 1.1 Sólido Rígido

La Figura 1.1 muestra un sólido con una forma genérica al que se aplica un sistema de fuerzas. Como consecuencia de las fuerzas aplicadas el sólido se traslada y gira sin deformarse, es decir, se comporta como un *Sólido Rígido*.

1.1.2 Sólido Deformable

Si un sólido sometido a un conjunto de fuerzas alcanza el equilibrio produciéndose modificaciones en su forma original, debemos adoptar el modelo de *Sólido Deformable*. Dicho modelo considera una distribución continua de la materia, así como la variación, también continua, de las distancias entre cualesquiera de los puntos que lo constituyen. Para establecer las ecuaciones generales que gobiernan el comportamiento mecánico de los sólidos deformables, es necesario complementar las ecuaciones de la estática, cinemática y dinámica con ecuaciones que relacionen las modificaciones de forma del sólido con las fuerzas que se producen en el interior del mismo debidas a este cambio de forma.

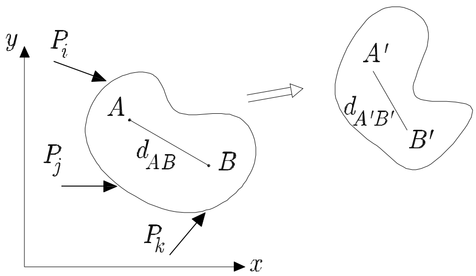

Figura 1.2 Sólido Deformable

La Figura 1.2 muestra un sólido con una forma genérica al que se aplica un sistema fuerzas. Como consecuencia de las fuerzas aplicadas el sólido se traslada, gira y deforma, es decir, se comporta como un *Sólido Deformable*.

1.2 Hipótesis básicas de la Elasticidad y de la Resistencia de Materiales

La cinemática y dinámica de sólidos deformables queda definida mediante la imposición de las hipótesis básicas establecidas en el apartado 1.1. Dichas hipótesis dejan el campo de estudio del sólido deformable muy abierto, por lo que se suele acotar estableciendo hipótesis adicionales. Una simplificación al problema general del sólido deformable consiste en plantear el comportamiento del mismo como lineal, lo que implica asumir tres hipótesis adicionales:

1. *Pequeños desplazamientos*

2. *Pequeñas deformaciones*

3. *Comportamiento elástico y lineal del material*

1.2.1 Pequeños desplazamientos

La hipótesis de *pequeños desplazamientos* implica que los desplazamientos del sólido son tan pequeños que las ecuaciones de equilibrio pueden plantearse, sin error apreciable, en la posición inicial.

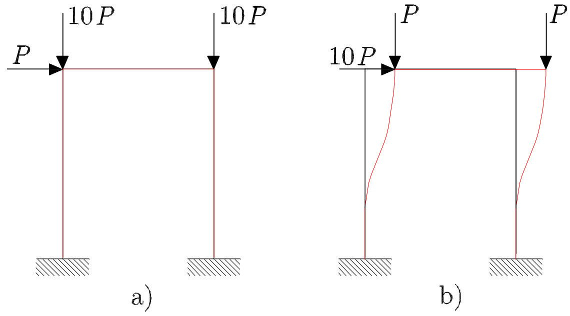

Figura 1.3 Hipótesis de pequeños desplazamientos

En la Figura 1.3 se muestra un pórtico sometido a dos sistemas de fuerzas y la deformada debida a cada uno de estos sistemas de fuerzas. El comportamiento de la estructura de la Figura 1.3 a) frente al sistema de cargas actuante puede considerarse dentro de la hipótesis de pequeños desplazamientos. La deformada coincide prácticamente con la configuración inicial del pórtico. En la estructura de la Figura 1.3 b) la configuración deformada de la estructura difiere sustancialmente de la configuración inicial. Por tanto, no es correcto plantear las ecuaciones de equilibrio en la configuración anterior a la aplicación del sistema de cargas, ya que los resultados obtenidos no tendrían en cuenta los grandes desplazamientos que ha sufrido la estructura.

1.2.2 Pequeñas deformaciones

La hipótesis de *pequeñas deformaciones* supone que las derivadas de los desplazamientos son despreciables frente a la unidad, y los productos de derivadas son despreciables frente a las propias derivadas. Esto implica que las deformaciones se expresen como combinación lineal de las derivadas primeras de los desplazamientos. Por ejemplo, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, siendo ε_{ij} la deformación, y u_i y u_j los desplazamientos.

1.2.3 Comportamiento elástico y lineal del material

En todo punto de un sólido de un determinado material existe una relación entre las tensiones y las deformaciones en dicho punto al someter al sólido a un sistema cualesquiera de cargas. Si el sólido recupera su forma inicial al cesar la aplicación de las cargas, se dice que el material tiene un comportamiento *elástico*. Si además, la relación entre tensiones y deformaciones es lineal, se dice que el material tiene un comportamiento *elástico* y *lineal*.

Las tres hipótesis anteriores son **necesarias** y **suficientes** para considerar el sólido deformable como elástico y lineal. Además de las tres hipótesis anteriores, en el estudio de la Elasticidad Lineal y de la Resistencia de Materiales, se suponen estas otras hipótesis:

- Principio de Saint-Venant
- El material es homogéneo
- El material es isótropo

- El problema es estático

- El problema es isotermo

1.2.4 Principio de Saint-Venant

El Principio de Saint-Venant establece que sistemas estáticamente equivalentes producen los mismos efectos. La Figura 1.4 muestra dos placas rectangulares, de idénticas dimensiones, que se encuentran empotradas en un extremo y sometidas a una carga uniformemente distribuida en el otro. En la placa de la Figura 1.4 a), la carga se distribuye uniformemente en la dimensión h_1, mientras que en la placa de la Figura 1.4 b) la carga se distribuye uniformemente sobre la dimensión h_2. En ambos casos la resultante de la distribución de fuerzas aplicadas sobre cada placa es qh_1. Además, la distribución de *tensiones normales* en la dirección de la carga se ha representado sobre la superficie de cada placa, mostrando como se transmite la carga hasta el apoyo en cada una de las placas. Para la placa que se muestra en la Figura 1.4 a) podemos observar como la carga se transmite hasta el apoyo de forma uniforme. Sin embargo, en el caso de la placa que se muestra en la Figura 1.4 b), se advierte una alteración en la distribución de las tensiones normales hasta una cierta distancia de la zona de aplicación de la carga, a partir de la cual la carga se transmite hasta el apoyo de forma uniforme, como en el caso de la placa que se muestra en la Figura 1.4 a). Podemos concluir que la aplicación de la carga en un tramo limitado puede considerarse como una discontinuidad que provoca alteraciones en la transmisión de la carga. No obstante, a una distancia suficientemente alejada de la zona de aplicación, dicha discontinuidad no tiene afecto alguno.

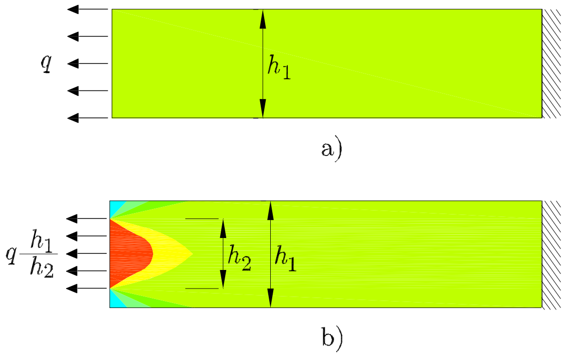

Figura 1.4 Principio de Saint-Venant

1.2.5 Material homogéneo

Considerar el material homogéneo significa que todos los puntos del mismo son iguales a efectos de comportamiento mecánico. Matemáticamente implica que la relación de comportamiento (relación entre tensiones y deformaciones) es similar en cualquier punto del material, y por tanto es independiente de las coordenadas del punto estudiado.

1.2.6 Material isótropo

Un material isótropo es aquél cuyo comportamiento mecánico es independiente de la dirección considerada.

1.2.7 Problema estático

Un problema es estático si se considera que los efectos de inercia son despreciables. Se considera que esto ocurre cuando las cargas exteriores se aplican lentamente, permanecen invariables con el tiempo, y el sólido tiene impedidos los desplazamientos como sólido rígido que puedan inducir las cargas actuantes.

1.2.8 Problema isotermo

En un problema isotermo no se producen variaciones de la temperatura, o al menos, el efecto de dicha variación es despreciable.

1.2.9 Consecuencias de las hipótesis básicas de la Elasticidad y de la Resistencia de Materiales

El conjunto de hipótesis anteriores, implica las siguientes consecuencias:

1. *Principio de Superposición*
2. *Existencia y unicidad de la solución*

El *Principio de Superposición* supone que hay una relación lineal entre la respuesta estructural y las cargas actuantes. Esto permite obtener la respuesta de una estructura ante distintas cargas actuando simultáneamente como la suma de la respuesta de la estructura ante cada una de ellas. Este principio se utiliza para resolver problemas con sistemas de cargas muy complejos descomponiendo los estados de cargas en otros más simples, cuya solución es conocida o más fácil de obtener. En la Figura 1.5 se muestra una aplicación del Principio de Superposición.

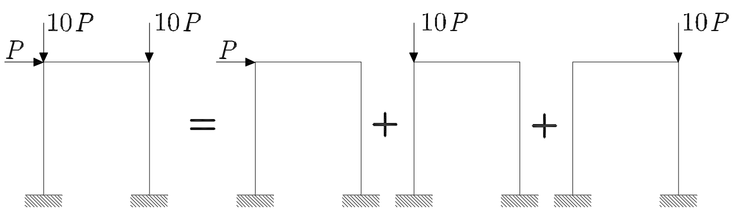

Figura 1.5 Principio de Superposición

La segunda consecuencia establece que siempre *existe* una solución a cualquier problema bien definido de mecánica de sólidos, y que está solución es *única*.

1.3 Modelo matemático para el análisis de Sólidos Deformables. Ecuaciones fundamentales

El objetivo inicial del análisis de Sólidos Deformables consiste en establecer la relación entre las magnitudes estáticas externas (fuerzas) y las magnitudes cinemáticas externas (desplazamientos).

Para establecer dicha relación, es necesario conocer que ocurre en el interior del sólido, definiéndose las *magnitudes internas*. Las magnitudes cinemáticas y estáticas internas se relacionan a través de la ley que modela el comportamiento del material, la cual es independiente de la geometría del sólido y de las condiciones de contorno. Las magnitudes estáticas externas se relacionan con las magnitudes estáticas internas a través de las ecuaciones de equilibrio. Mientras que las magnitudes cinemáticas externas se relacionan con las magnitudes cinemáticas internas a través de las ecuaciones de compatibilidad. De esta manera, se consigue relacionar las acciones externas con los desplazamientos del sólido a través de las variables internas.

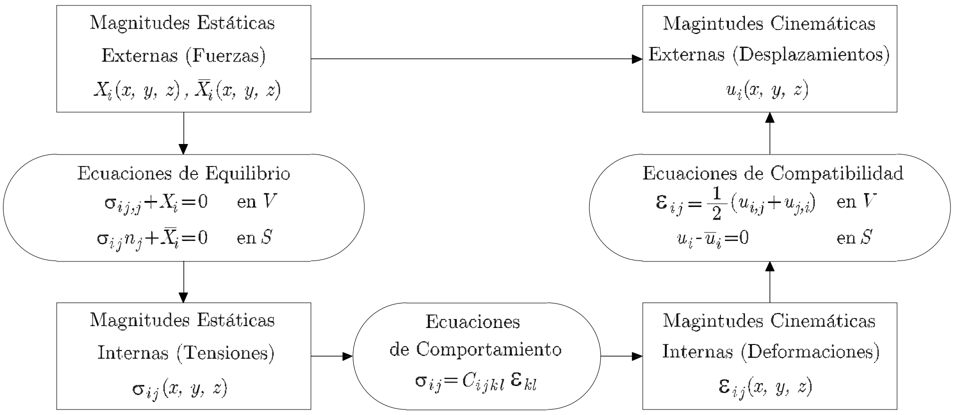

Figura 1.6 Modelo matemático para el análisis de sólidos deformables

En la Figura 1.6 se muestra esquemáticamente el modelo matemático de análisis. Generalmente, la formulación matemática de este esquema conduce a ecuaciones de gran complejidad cuya solución analítica es inabordable. Ello hace que la obtención de soluciones exactas quede restringida a sólidos con geometrías y cargas muy concretas.

1.4 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.1

Una barra de sección transversal cilíndrica de un determinado material ha sido sometida a un ensayo de tracción. En la Tabla 1.1 se indican los valores obtenidos en dicho ensayo.

Se pide:

1. Construir la gráfica $\sigma - \varepsilon$
2. Determinar gráficamente el valor límite de σ a partir del cual el material deja de comportarse linealmente y la deformación correspondiente
3. Determinar gráficamente los valores de σ para $\varepsilon = 0,0035$, asumiendo que el material se comporta linealmente para ese valor de ε y considerando un comportamiento no lineal del material

Datos:

Tabla 1.1 Valores obtenidos del ensayo de tracción

σ (MPa)	ε (%)	σ (MPa)	ε (%)
0,0	0,00	120,0	0,2067
15,0	0,0256	135,0	0,2450
30,0	0,0513	150,0	0,2984
45,0	0,0769	165,0	0,3748
60,0	0,1025	180,0	0,5202
75,0	0,1281	180,0	0,6400
90,0	0,1538	165,0	0,7732
105,0	0,1794	160,89	0,8000

Solución:

1. Construir la gráfica $\sigma - \varepsilon$

   - Se muestra la gráfica en la Figura 1.7

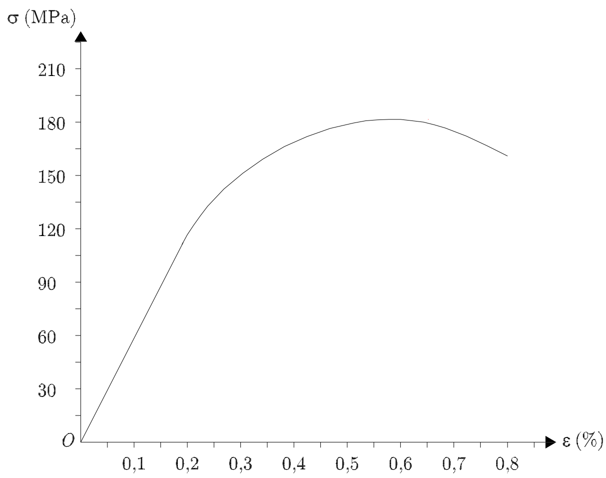

Figura 1.7 Diagrama tensión-deformación

2. Determinar gráficamente el valor límite de σ a partir del cual el material deja de comportarse linealmente y la deformación correspondiente

   - La Figura 1.8 muestra el valor límite de σ en el que el material deja de comportarse linealmente

3. Determinar gráficamente los valores de σ para $\varepsilon = 0,0035$, asumiendo que el material se comporta linealmente para ese valor de ε y considerando un comportamiento no lineal del material

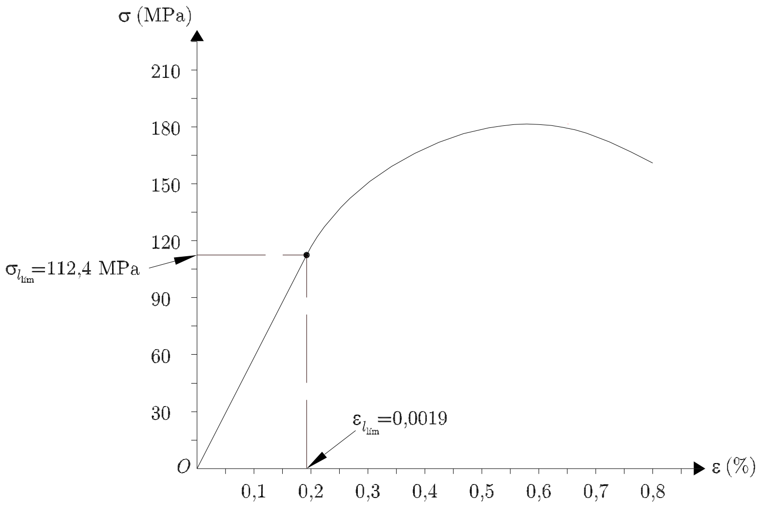

Figura 1.8 Determinación gráfica del valor límite de σ a partir del cual el material deja de comportarse linealmente y la deformación correspondiente

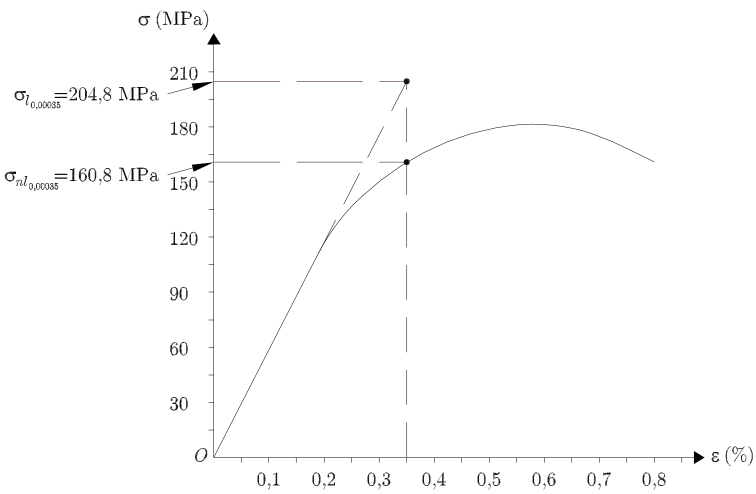

Figura 1.9 Determinación gráfica de los valores de σ para $\varepsilon = 0,00035$, asumiendo comportamientos lineal y no lineal del material

- La Figura 1.9 muestra los valores solicitados

Ejercicio 1.2

Para la viga en el voladizo que se muestra en la Figura 1.10 a) se conocen los desplazamientos del punto A para los estados de cargas que se muestran en la Figura 1.10 b).

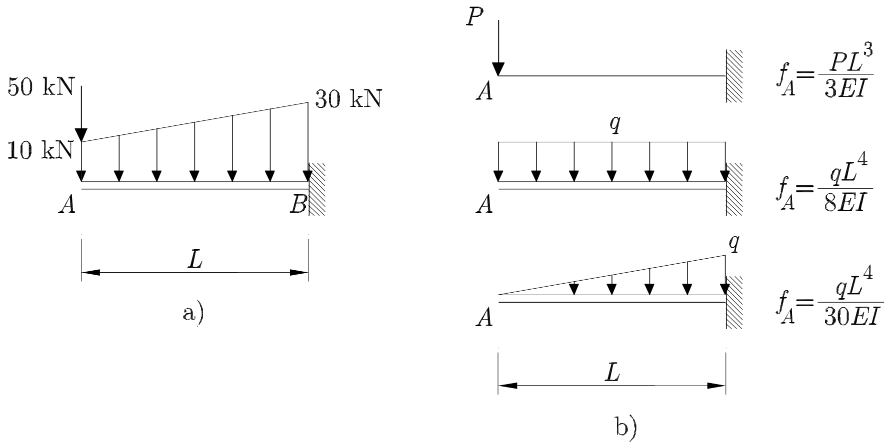

Figura 1.10 Aplicación del Principio de Superposición

Obtener:

1. El desplazamiento vertical del punto A (w_A), aplicando el principio de superposición

Solución:

1. Obtener el desplazamiento vertical del punto A, aplicando el principio de superposición

$$w_A = \frac{50L^3}{3EI} + \frac{23L^4}{12EI}$$

Ejercicio 1.3

Para las placas cargadas que se muestran en la Figura 1.11,

Determinar:

1. Si los sistemas de cargas aplicados en los extremos de las placas son estáticamente equivalentes

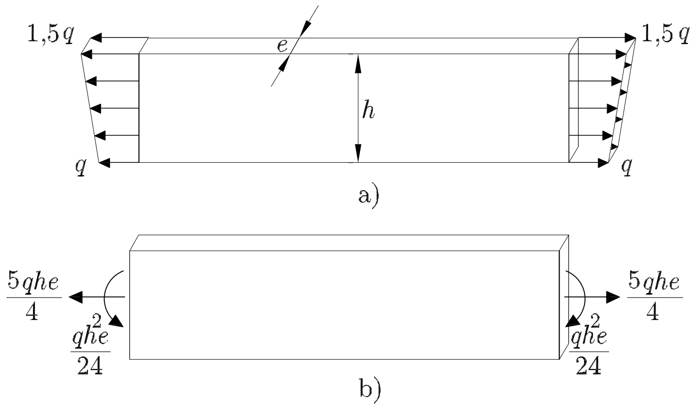

Figura 1.11 Aplicación del Principio de Saint-Venant

Solución:

1. Determinar si los sistemas de cargas aplicados en los extremos de las placas son estáticamente equivalentes

   - Fuerza resultante para el sistema de cargas que se muestra en la Figura 1.11 a): $H = \dfrac{5qhe}{4}$
   - Momento resultante para el sistema de cargas que se muestra en la Figura 1.11 a): $M = \dfrac{qh^2e}{24}$

   Por lo que sí son estáticamente equivalentes.