Universidad Politécnica de Cartagena
Dpto. Matemática Aplicada y Estadística
Estadística *Intervalos de confianza*

Problema 1

En el control de paredes recubiertas de yeso se obtiene para una muestra de 15 mediciones del espesor un valor promedio igual a 13,3.
Por experimentos anteriores, se piensa que la distribución de los valores del espesor se puede modelizar por una variable Normal con desviación típica igual a 1,1..

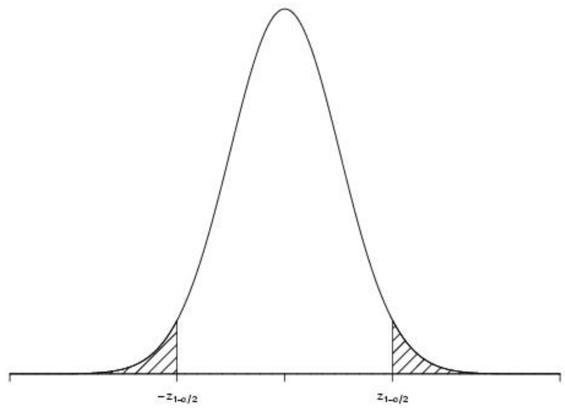
1. Construir un intervalo de confianza al 95% para el espesor promedio.

2. Cite tres factores que influyen la precisión de la estimación por intervalo de confianza.

3. Si en la estimación anterior queremos cometer un error inferior a 0.5, determinar el tamaño de la muestra mínimo necesario para garantizar este objetivo.

Soluciones del Problema 1

1. *Construcción detallada del intervalo para la media poblacional para un α dado. Sean X_1, X_2,… X_{12}, las variables "espesor primera medición," etc hasta "espesor novena medición". Consideramos la media muestral $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_{12}}{12}$. Puesto que estamos en el caso en que la variable X sigue una distribución normal, tenemos que $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.*



Tenemos

$$P(-z_{1-\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Lo que es equivalente a

$$P(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Despejando obtenemos

$$P(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha.$$

Deducimos que un intervalo de confianza al 100$(1-\alpha)\%$ *de confianza para la media poblacional es*

$$\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

En nuestro caso particular, nos fijamos $\alpha = 0.05$, *necesitamos* $z_{0.975}$, *que según la tabla es igual a 1.96 aprox. . Sustituyendo obtenemos por lo tanto* 13.3 ± 0.557

2. *Los tres factores que afectan la precisión del intervalo son*

   - *La desviación típica: cuanto más grande, peor precisión,*
   - *El tamaño muestral n: cuanto más grande, mayor precisión.*
   - *El nivel de confianza: cuanto más grande, peor precisión.*

3. *El margen de error en la estimación es $z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si queremos que no sea mayor de 0.5, imponemos*
$$z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.5.$$
Despejamos n y obtenemos
$$n \geq \left(\frac{1.96 \cdot 1.1}{0.5}\right)^2 = 18.6$$
Necesitaremos probar 19 mediciones.

Problema 2

En el control de paredes recubiertas de yeso se obtienen los siguientes valores de espesores:

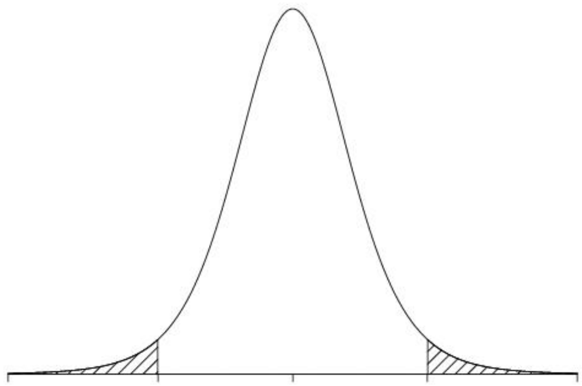
14,2 12,2 12,4 16,2 11,8 14,9 13,5 15,0 13,2

Por experimentos anteriores, se piensa que la distribución de sus valores se puede modelizar por una variable Normal.

1. Construir un intervalo de confianza al 98% para la temperatura de deflexión promedio.
2. ¿Cuál sería el efecto sobre la precisión de la estimación de aumentar el nivel de confianza del intervalo?
3. Si en la estimación anterior queremos cometer un error inferior a 0.75, determinar el tamaño de la muestra mínimo necesario para garantizar este objetivo.

Soluciones del Problema 2

1. *Construcción detallada del intervalo para la media poblacional para un α dado. Sean X_1, X_2,... X_{12}, las variables "espesor primera medición," etc hasta "espesor novena medición". Consideramos la media muestral $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{9zx}$. Puesto que estamos en el caso en que la variable X sigue una distribución normal, tenemos que $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$.*



Tenemos

$$P(-t_{n-1,1-\alpha/2} \leq T \leq z_{n-1,1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Lo que es equivalente a

$$P(-t_{n-1,1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq t_{n-1,1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Despejando obtenemos

$$P(\bar{X} - t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha.$$

Deducimos que un intervalo de confianza al 100$(1-\alpha)\%$ *de confianza para la media poblacional es*

$$\bar{X} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

En nuestro caso particular, nos fijamos $\alpha = 0.02$*, necesitamos* $t_{8,0.99}$*, que según R es igual a 2.90 aprox. Por otra parte, calculamos* $\bar{x} = 13.71$ *y* $s = 1.43$*. Sustituyendo obtenemos por lo tanto* 13.71 ± 1.43

2. *Al aumentar la confianza, pagamos el precio de perder precisión: aumentará el margen de error*

3. *Para contestar a esta pregunta, necesitamos hacer la aproximación de que conocemos la desviación típica poblacional. La podemos aproximar de los datos anteriores por*

$\sigma = 1.4$, *El margen de error en la estimación es* $z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. *Si queremos que no sea mayor de 0.75, imponemos*

$$z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.75.$$

Despejamos n *y obtenemos*

$$n \geq \left(\frac{2.32 \cdot 1.4}{0.75}\right)^2 = 18.75$$

Necesitaremos probar 19 mediciones.

Problema 3

Para determinar el contenido exacto de carbonato de calcio de una caliza, se realizan, en las mismas condiciones, 5 mediciones y se obtiene los resultados siguientes:

$$49.56\%,\ 49.82\%,\ 49.30\%,\ 50.16\%,\ 50.06\%.$$

Se supone que el valor medido se puede expresar como $[CaC0_3]_{pob} + \varepsilon$, donde $[CaC0_3]_{pob}$ representa el valor exacto (no observable) y ε el error que se comete durante la medición. Suponiendo que ε sigue una distribución normal de media 0 y de desviación típica $\sigma = 0.3$

1. Determinar la distribución de los valores del valor medido del contenido de carbonato de calcio.

2. Construir un intervalo de confianza al nivel de 90% para el contenido exacto promedio de carbonato de calcio de la caliza.

3. Si se desea cometer como máximo un error de 0.2 con una confianza del 95%, ¿cuántas mediciones más deberíamos realizar?.

4. ¿Qué interpretación tiene un intervalo de confianza? En particular, explique que quiere decir “un nivel de confianza de 95%”.

Soluciones del Problema 3

1. *El valor medido* X *es igual al contenido exacto de carbonato de calcio de la caliza más el error* ε *que sigue una distribución normal con media cero y varianza*

desconocida σ^2. Por consiguiente, si denoto por $[CaC0_3]_{pob}$ el contenido exacto de carbonato de calcio, tenemos

$$X = [CaC0_3]_{pob} + \varepsilon$$

y deduzco que X sigue una distribución normal de media $[CaC0_3]_{pob}$ y de varianza $\sigma^2 = 0.09$. Hay que destacar que el centro de la distribución de valores del valor medido es igual al contenido exacto de carbonato de calcio de la caliza, i.e $\mu = [CaC0_3]_{pob}$

2. *Empecemos por calcular la media muestral*

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{49.56 + 49.82 + 49.30 + 50.16 + 50.06}{5} \simeq 49.78.$$

Tenemos que construir un intervalo de confianza para la media poblacional en el caso en que la varianza poblacional es conocida. Un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ % está dado por

$$\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

En nuestro caso, nos piden un nivel de confianza del 90%, lo que quiere decir que $\alpha = 0.1$. En la tabla, encontramos $z_{1-\alpha/2} = z_{0.95} \simeq 1.64$ y el intervalo de confianza pedido es

$$49.78 - 1.64 \cdot 0.3/\sqrt{5} \leq \mu \leq 49.78 + 1.64 \cdot 0.3/\sqrt{5}$$

finalmente, un intervalo de confianza al 90% para la media poblacional es

$$\mu \simeq 49.78\% \pm 0.22$$

3. *El margen de error en la estimación es $z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si queremos que no sea mayor de 0.2, imponemos*

$$z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.2.$$

Despejamos n y obtenemos

$$n \geq \left(\frac{1.64 \cdot 0.3}{0.2}\right)^2 = 6.04.$$

Por lo tanto, el valor de $n = 7$ conviene. más.

Problema 4

Se quiere estudiar a temperatura de deflexión bajo carga de un tipo de tuberías de PVC. Por experimentos anteriores, se piensa que la distribución de sus valores se puede modelizar por una variable Normal con desviación típica igual a 10. Para sacar información sobre la temperatura promedio de deflexión, se realizó un experimento consistente en tomar 12 tuberías anotando la temperatura de deflexión observada (en ^{0}F). Los resultados fueron los siguientes:

Temp. Deflexión	206	188	205	187	194	193	207	185	189	213	192	210

1. Traducir los datos del enunciado, introduciendo experimento y variable.

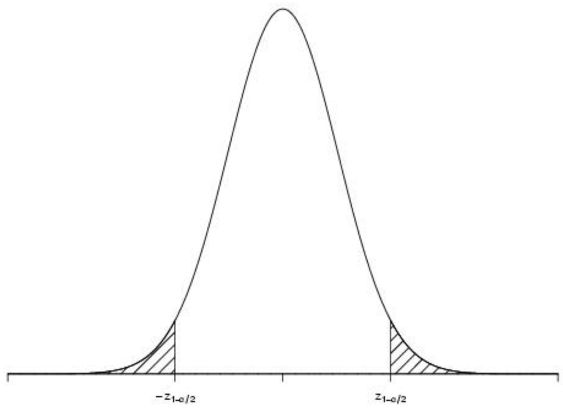
2. Construir de manera detallada un intervalo de confianza al 95% para la temperatura de deflexión promedio.

3. Si en la estimación anterior queremos cometer un error inferior a 2 ^{0}F, determinar el tamaño de la muestra mínimo necesario para garantizar este objetivo.

Soluciones del Problema 4

1. *Consideramos el experimento que consiste en escoger un tubo PVC y medir su temperatura de deflexión bajo carga. Llamamos X la variable "Temperatura medida", suponemos que $X \sim \mathcal{N}(\mu, 100)$.*

2. *Construcción detallada del intervalo para la media poblacional para un α dado. Sean X_1, X_2,... X_{12}, las variables "temperatura medida para el primer tubo", etc hasta "temperatura media para 12º tubo". Consideramos la media muestral $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_{12}}{12}$. Puesto que estamos en el caso en que la variable X sigue una distribución normal, tenemos que $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.*



Tenemos

$$P(-z_{1-\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Lo que es equivalente a

$$P(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Despejando obtenemos

$$P(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha.$$

Deducimos que un intervalo de confianza al 100$(1-\alpha)\%$ *de confianza para la media poblacional es*

$$\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

En nuestro caso particular, nos fijamos $\alpha = 0.05$, *necesitamos* $z_{0.975}$, *que según la tabla es igual a 1.96. Por otra parte, calculamos* $\bar{x} = 197.4$. *Sustituyendo obtenemos por lo tanto* 197.4 ± 5.66

3. Si en la estimación anterior queremos cometer un error inferior a 2 ^{0}F, determinar el tamaño de la muestra mínimo necesario para garantizar este objetivo. *El margen de error en la estimación es* $z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. *Si queremos que no sea mayor de 2, imponemos*

$$z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 2.$$

Despejamos n y obtenemos

$$n \geq \left(\frac{1.96 \cdot 10}{2}\right)^2 = 96.04.$$

Necesitaremos probar 97 tubos.

$\boxed{\text{Problema 5}}$

Se realizan mediciones de la resistencia de unos bloques de hormigón. Denotamos por X la variable "Valor obtenido en una medición realizada al azar".

Suponemos a partir de ahora que se puede modelizar la distribución de X por una distribución Normal con media desconocida, y con varianza 4.2.

Se realizan 8 mediciones de la resistencia de unos determinados bloques, obteniéndose los siguientes datos:

$$5.3,\ 4.2,\ 7.2,\ 6.3,\ 5.5,\ 6.5,\ 4.8,\ 5.1$$

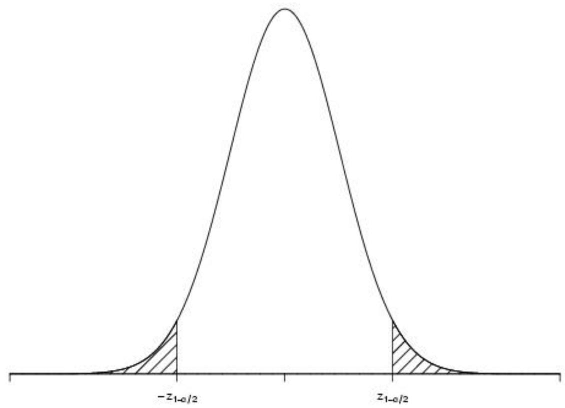
1. Construir un intervalo de confianza al 95% para el centro de la distribución de X.

2. ¿Qué interpretación tiene un intervalo de confianza? En particular, explique que quiere decir "un nivel de confianza de 95%"

3. Si en la estimación anterior queremos cometer un error inferior a una unidad, determinar el tamaño de la muestra mínimo necesario para garantizar este objetivo.

Soluciones del Problema 5

1. *Construcción detallada del intervalo para la media poblacional para un α dado. Sean X_1, X_2,... X_8, las variables "valor obtenido en la 1º médición", etc hasta "valor obtenido en la 8º medición". Consideramos la media muestral $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_8}{8}$. Puesto que estamos en el caso en que la variable X sigue una distribución normal, tenemos que $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.*



Tenemos

$$P(-z_{1-\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Lo que es equivalente a

$$P(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Despejando obtenemos

$$P(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha.$$

Deducimos que un intervalo de confianza al 100$(1-\alpha)$% *de confianza para la media poblacional es*

$$\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

En nuestro caso particular, nos fijamos $\alpha = 0.05$, *necesitamos* $z_{0.975}$, *que según la tabla es igual a 1.96. Sustituyendo obtenemos por lo tanto* 5.61 ± 1.42.

2. *Ver Transparencias*

3. *El margen de error en la estimación es* $z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. *Si queremos que no sea mayor de 1, imponemos*

$$z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1.$$

Despejamos n y obtenemos

$$n \geq \left(\frac{1.96 \cdot \sqrt{4.2}}{1} \right)^2 = 16.1.$$

Necesitaremos probar 17 tubos.