



Conceptos básicos de la probabilidad

Mathieu Kessler

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Universidad Politécnica de Cartagena

Cartagena, Enero 2010



Guión

- 1 Introducción
- 2 Algunos conceptos básicos
 - Experimento aleatorio
 - Espacio muestral y sucesos
- 3 Concepto de probabilidad
- 4 La probabilidad condicionada



Guión

- 1 **Introducción**
- 2 Algunos conceptos básicos
 - Experimento aleatorio
 - Espacio muestral y sucesos
- 3 Concepto de probabilidad
- 4 La probabilidad condicionada



Partimos de una constatación:

- Los datos resultantes de experimentos presentan **variabilidad**.
⇒ Hay incertidumbre.
- Nuestro objetivo: extraer información y apoyar la toma de decisiones.
- Buscamos modelos matemáticos que incorporen la incertidumbre y ayuden a las decisiones.

Los modelos matemáticos de la incertidumbre

Estos modelos no permiten predecir el resultado de un experimento, sino que evalúan las **posibilidades** que tiene un(os) resultado(s) de ocurrir.



La teoría de la probabilidad

La teoría de la probabilidad es la base matemática de los modelos de la incertidumbre.

Presente en (casi) todos los campos de la actividad humana, por ejemplo:

- Seguros (ciencias actuariales)
- Finanzas
- Medicina
- Telecomunicaciones
- Ingeniería en general...



Guión

- 1 Introducción
- 2 Algunos conceptos básicos
 - Experimento aleatorio
 - Espacio muestral y sucesos
- 3 Concepto de probabilidad
- 4 La probabilidad condicionada



Algunos conceptos básicos

Experimento aleatorio

- Un experimento aleatorio es aquel que, aun realizado en las mismas condiciones, produce resultados posiblemente distintos.
- Se opone a la noción de experimento determinista.
- Un ejemplo sencillo: tirar un dado.



Espacio muestral

- El conjunto S de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama el **espacio muestral** de este experimento.
- Ejemplo del dado: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suceso

- Un suceso: cualquier colección de resultados posibles de un exp. aleatorio.
- Siempre se podrá describir de dos maneras:
 - usando palabras
 - como subconjunto de S , usando el formalismo de los conjuntos.
- Para el ejemplo del dado, $A = \{2, 4, 6\}$



Algunos conceptos básicos

¿Cuándo decimos que “ocurre” un suceso A ?

Realizamos el experimento aleatorio. Decimos “Ocorre A ” si el resultado pertenece a A .

Lanzo un dado, y sale un 4. Si el suceso A = “sacar un número par”, puedo decir: “Ha ocurrido A ”.



¿Cómo expresar sucesos complejos usando sucesos más simples?

La unión de sucesos

- Es la unión de los resultados en A y los resultados en B :

$$A \cup B = \{x \in S : x \in A \text{ o } x \in B\},$$

- Ocurre $A \cup B \Leftrightarrow$ Ocurre A o ocurre B .
- Ejemplo $A =$ "sacar un número par", $B =$ "sacar un número mayor o igual a 5".

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}.$$



¿Cómo expresar sucesos complejos usando sucesos más simples?

La intersección de sucesos

- Son los resultados comunes a A y a B :

$$A \cap B = \{x \in S : x \in A \text{ y } x \in B\},$$

- Ocurre $A \cap B \Leftrightarrow$ Ocurre A y ocurre B .
- Ejemplo $A =$ "sacar un número par", $B =$ "sacar un número mayor o igual a 5".

$$A \cap B = \{6\}.$$



¿Cómo expresar sucesos complejos usando sucesos más simples?

El complementario de un suceso

- Son los resultados de S que no pertenecen a A :

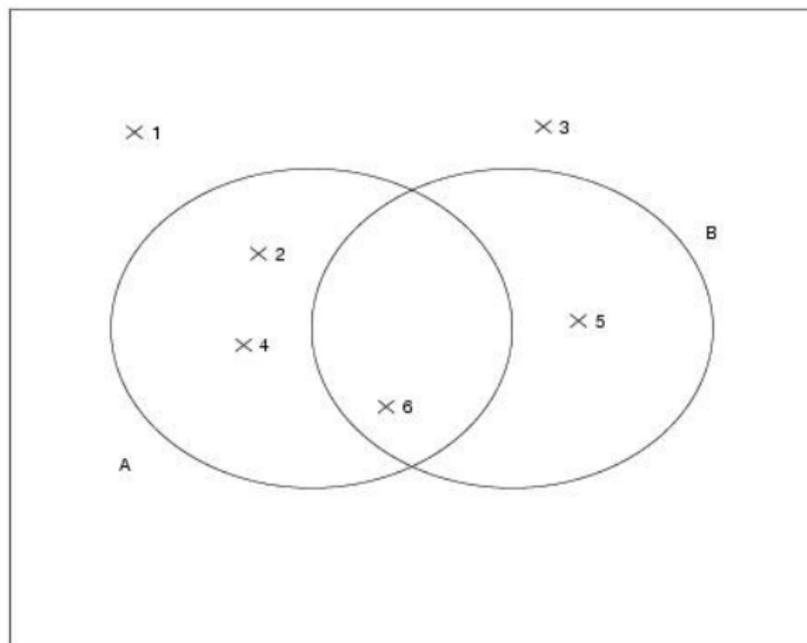
$$A^c = \{x \in S : x \notin A\},$$

- Ocurre $A^c \Leftrightarrow$ **No** ocurre A .
- Ejemplo $A =$ "sacar un número par".

$$A^c = \{1, 3, 5\}.$$



Diagrama de Venn





Guión

- 1 Introducción
- 2 Algunos conceptos básicos
 - Experimento aleatorio
 - Espacio muestral y sucesos
- 3 Concepto de probabilidad
- 4 La probabilidad condicionada



Concepto de probabilidad

Nuestro objetivo

Queremos cuantificar la información que tenemos sobre las “posibilidades” que tiene un determinado suceso de ocurrir.

Nos limitaremos a una definición informal de la probabilidad...



Definición informal de la probabilidad

Asignamos a cada suceso A una cantidad $\mathbb{P}(A)$, que refleja nuestra creencia en que ocurra A . Cumple:

- 1 Es un número entre 0 y 1: $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$,
- 2 siendo $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(S) = 1$.
- 3 La probabilidad de que A no ocurra: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- 4 Si B tiene más resultados que A ($A \subset B$)

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

- 5 Regla de la adición:
Si A y B son incompatibles: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
En general: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.



El caso de un espacio muestral finito

Si sólo hay un número finito de resultados posibles, basta con asignar una probabilidad a cada uno de ellos (de manera que sumen 1).

Si además los resultados son equiprobables:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de elementos en } A}{\text{n}^\circ \text{ de elementos totales}} = \frac{\text{n}^\circ \text{ de casos favorables}}{\text{n}^\circ \text{ de casos posibles}}.$$



Ejemplos de cálculo de probabilidades en espacio muestral finito y resultados equiprobables:

¿Qué probabilidad tengo de acertar en la lotería, la lotería primitiva, el euromillón?

- 1** *El gordo de la lotería.* El experimento: escoger al azar un número entre 100000 posibles, si $A =$ "acierto"

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{100000}.$$

- 2** *La primitiva.* El experimento: escoger al azar 6 números entre 49.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{13984000}.$$

- 3** *El euro-millón Euro-millón,* el juego consiste en acertar 5 números de una tabla de 50 y además acertar 2 números (estrellas) de una tabla de 9.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{76275360}$$



La lotería

En 2008: los españoles se gastaron 32 000 millones de euros en juegos. (Fuente: Informe anual del juego en España 2008, Ministerio del Interior).

Corresponde a casi 700 euros por español.....

Un participante que siempre gana: el estado. En 2008, ingresó 2900 millones de euros por los juegos de gestión estatal.



Interpretación frecuentista de la probabilidad

Para un suceso A , realizamos un gran número de veces n el experimento, y consideramos que

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{n}^\circ \text{ de veces que ha ocurrido } A}{n}.$$

Podríamos comprobar así si las monedas de un euro sirven para tomar una decisión entre dos al azar...

Hay diferencias entre los diseños de las monedas entre los distintos países. Al tirarlas, ¿hay una probabilidad de $1/2$ de obtener cara?

Algunos experimentos famosos:

- Buffon, siglo XVIII. Tiró 4040 veces una moneda.
- K. Pearson, siglo XX. Tiró 24000 veces la misma moneda.
- Kerrich, matemático surafricano, prisionero de guerra, segunda guerra mundial. Tiró 10000 veces la misma moneda.



Guión

- 1 Introducción
- 2 Algunos conceptos básicos
 - Experimento aleatorio
 - Espacio muestral y sucesos
- 3 Concepto de probabilidad
- 4 La probabilidad condicionada



La probabilidad condicionada

Corresponde a una re-asignación o actualización de la probabilidad de un suceso cuando tenemos información sobre el resultado del experimento.

Ejemplo

En una tirada de un dado he apostado por el "6". Tiran el dado sin que yo pueda ver el resultado, pero me dicen que ha salido un número par. Teniendo esta información, ¿cuál es la probabilidad de que haya ganado la apuesta?



Definición

Definición

Si A y B son dos sucesos tales que $\mathbb{P}(B) > 0$, la probabilidad de A condicionada a B se denota por $\mathbb{P}(A|B)$ y es igual a

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

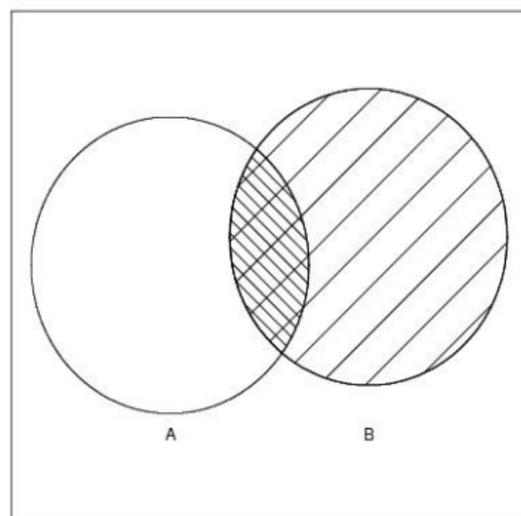
Interpretación

Realizamos el experimento, y sabemos que ha ocurrido B , ¿cuál es la probabilidad de que haya ocurrido A también?



Interpretación intuitiva

Nuestro nuevo espacio de resultados posibles es B :



$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$



Ejemplos de probabilidades condicionadas

Tabaquismo y cáncer de pulmón

Web Asociación Española contra el Cáncer (AECC): *el 90% de los pacientes con cáncer de pulmón son fumadores.*

Planteamiento - traducción

- Experimento: escoger al azar una persona en la población española.
- Definimos los sucesos:
 - $F =$ "Es fumadora."
 - $T =$ "Tiene un tumor asociado a un cáncer de pulmón."
- La información es: $\mathbb{P}(F|T) = 0.9$. ¿y $\mathbb{P}(T|F)$?



Ejemplos de probabilidades condicionadas

Eslogan publicitario para la lotería

Hace unos años en Francia, un eslogan publicitario: *¡el 100% de los acertantes probaron suerte!*

Planteamiento - traducción

- Experimento: escoger al azar una persona en la población francesa.
- Definimos los sucesos:
 - P = “probó suerte”
 - A = “acertó”
- La información es: $\mathbb{P}(P|A) = 1$. ¿y $\mathbb{P}(A|P)$?



Sucesos independientes

Definición

Dos sucesos A y B son **independientes** si el hecho de saber que ha ocurrido uno de ellos no modifica la probabilidad de que ocurra el otro.

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

Ejemplos:

- La gente prefiere comprar loterías en administraciones donde ya tocó el gordo...
- ¿Sabéis por qué un matemático siempre se lleva una bomba cuando sube a un avión?
Porque la probabilidad de que haya dos bombas en el mismo avión es mucho más pequeña que la de que haya solo una....