

# Laboratorio de Comunicaciones

## Modulaciones de Amplitud

Fernando D. Quesada Pereira<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones  
Universidad Politécnica de Cartagena

14 de febrero de 2010

- 1 Introducción
- 2 Modulaciones de Amplitud típicas
  - Doble Banda Lateral
  - Modulación AM
- 3 Moduladores de amplitud
- 4 Modulación en Banda Lateral Única (BLU)

# Características generales

- Las **modulaciones trasladan el espectro** de la señal de información hacia frecuencias acordes con las características del canal, los emisores y receptores (por ejemplo.- Antenas).
- En el proceso de demodulación se deben restaurar las frecuencias originales para recuperar el mensaje en banda base.
- La forma más sencilla de realizar una translación en frecuencia es utilizando un **multiplicador**.

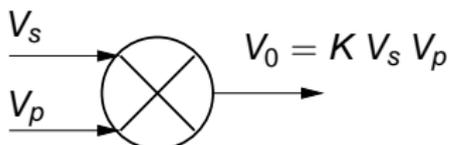


Figura: Multiplicador

- 1 Introducción
- 2 **Modulaciones de Amplitud típicas**
  - **Doble Banda Lateral**
  - Modulación AM
- 3 Moduladores de amplitud
- 4 Modulación en Banda Lateral Única (BLU)

# Modulación Doble Banda Lateral con multiplicador

Mediante el uso de un multiplicador se puede obtener una modulación en **doble banda lateral (DBL)** (portadora suprimida)

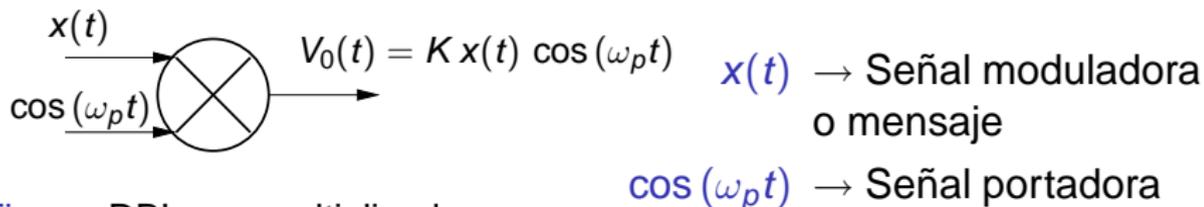


Figura: DBL con multiplicador

La señal moduladora más simple es un tono en frecuencia  $x(t) = A \cos(\omega_m t)$ . La señal a la salida del multiplicador es:

$$V_0(t) = A \cos(\omega_m t) \cos(\omega_o t) = \frac{A}{2} \left[ \cos((\omega_m - \omega_p)t) + \cos((\omega_m + \omega_p)t) \right]$$

# Espectro de la señal doble banda lateral

El espectro de una señal doble banda lateral cuyo moduladora es un tono es:

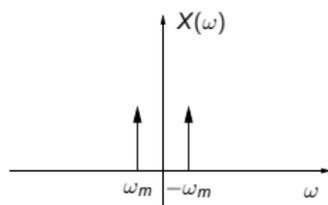


Figura: Espectro moduladora

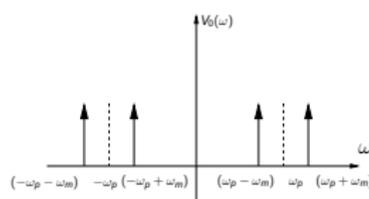


Figura: Espectro modulación DBL

En la práctica la señal  $x(t)$  es compleja, con un espectro en banda base genérico

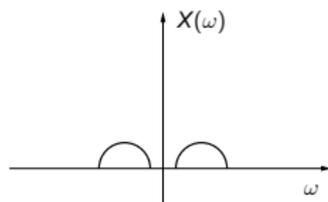


Figura: Espectro moduladora

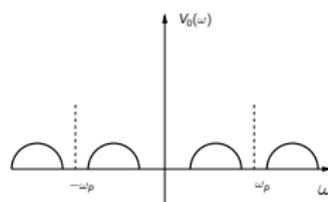


Figura: Espectro modulación DBL

- 1 Introducción
- 2 **Modulaciones de Amplitud típicas**
  - Doble Banda Lateral
  - **Modulación AM**
- 3 Moduladores de amplitud
- 4 Modulación en Banda Lateral Única (BLU)

# Modulación AM

En una señal AM además de la translación en frecuencia, se introduce **potencia a la portadora**.

$$V_0(t) = A(1 + mx(t)) \cos(\omega_p t)$$

Si  $x(t)$  está normalizada:  $\max[x(t)] = 1$ , entonces **m es el índice de modulación** → mide la potencia de la portadora en relación a las bandas laterales.

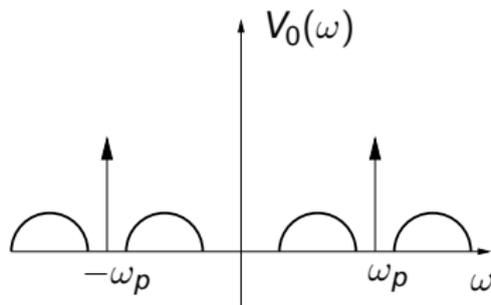


Figura: Espectro modulación AM

# Índice de modulación

No existe sobremodulación, se puede utilizar **detector de envolvente** ( $m < 1$ ).

Caso límite para que exista sobremodulación  $m = 1$ .

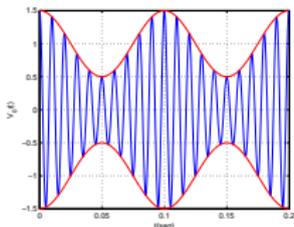


Figura: Modulación AM  $m = 0,5$

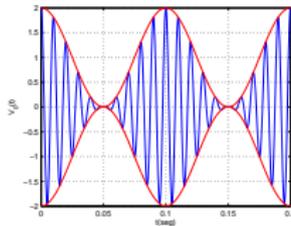


Figura: Modulación AM  $m = 1$

Existe **sobremodulación** ( $m > 1$ ).  
Hace falta detección coherente. La información ya no está en la envolvente.

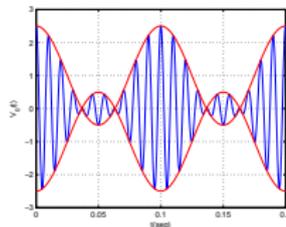


Figura: Modulación AM  $m = 1,5$

# Propiedades modulación AM

## Ventaja

La **información va contenida en la envolvente**, y se puede utilizar un simple detector de envolvente.

## Inconveniente

Se **desperdicia** parte de la **potencia** en transmitir la portadora.

La potencia instantánea es  $P(t) = V_0(t) i(t)$ . Para una carga de  $1\Omega$  se tiene  $P(t) = V_0^2(t)$ . Para calcular el valor medio se tiene:

$$\overline{P(t)} = \overline{V_0^2(t)} = \overline{A^2 \left(1 + m x(t)\right)^2 \cos^2(\omega_p t)} = A^2 \left[1 + m^2 \overline{x^2(t)} + 2m \overline{x(t)}\right] \overline{\cos^2(\omega_p t)}$$

Si se trabaja con moduladoras de valor medio nulo, el tercer término se anula:

$$\overline{P(t)} = A^2 \left[1 + m^2 \overline{x^2(t)}\right] \frac{1}{2}$$

# Eficiencia en potencia de la modulación AM

La **fracción** de la potencia total que se **aprovecha**, **contenida en las bandas laterales** es:

$$\eta = \frac{P_b}{P_T} = \frac{\frac{A^2}{2} m^2 \overline{x^2(t)}}{\frac{A^2}{2} [1 + m^2 \overline{x^2(t)}]} = \frac{m^2 \overline{x^2(t)}}{[1 + m^2 \overline{x^2(t)}]}$$

## Ejemplo

Si la señal moduladora es una senoide se tiene:

$$x(t) = \cos(\omega_m t) \quad \overline{x^2(t)} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \eta = \frac{m^2 \cdot 1/2}{1 + m^2 \cdot 1/2} = \frac{m^2}{2 + m^2}$$

Con  $m \leq 1$  se puede utilizar un detector de envolvente. Para  $m = 1$ , resulta que  $\eta = 1/3 = 0,33 \rightarrow 33\%$ . El 67% de la potencia se desperdicia en la portadora.

Si la potencia de la portadora es  $P_p = \frac{1}{2}A^2$ , entonces  $\overline{P(t)} = P_p(1 + m^2/2)$  (para una moduladora que sea una señal sinusoidal).

# Detector de Envolvente

E

El detector de envolvente está formado por un rectificador (diodo, y un conjunto  $RC$  (filtro paso-bajo)).

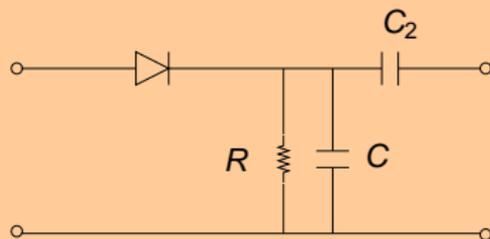
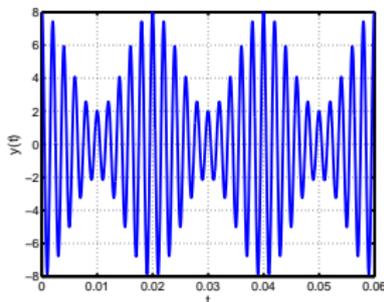


Figura: Detector de envolvente

El **condensador  $C$  se descarga a través de  $R$**  de modo que las variaciones rápidas de la portadora se pierden, y sólo quedan las lentas de la moduladora. Hay que **ajustar los valores de  $RC$**  para que se cumpla lo anterior. Al ser muy sencillo permite receptores baratos de AM. El condensador  $C_2$  elimina la componente continua.

# Ejercicio Propuesto

- Escriba la expresión matemática de la modulación anterior, especificando el valor del índice de modulación  $m$ , la frecuencia de la portadora  $\omega_p$ , la frecuencia de la moduladora  $\omega_m$  y la amplitud de la señal  $A$ .
- Represente la señal  $y(t)$  en frecuencia ( $Y(j\omega)$ ).
- Calcule la relación  $\eta$  entre la potencia correspondiente a la moduladora y la potencia total de la modulación.
- Dibuje la señal AM  $y(t)$  si  $m = 1$  y  $m = 1,5$  tanto en tiempo como en frecuencia. Asimismo, calcule la relación  $\eta$  en estos casos.
- Diseñe un detector de envolvente apropiado, especificando los valores de  $R$  y  $C$ , para poder obtener la moduladora de  $y(t)$ .



# Modulación de amplitud con elementos no lineales

## Modulaciones lineales con disp. ley cuadrática

Si se aplica un elemento no lineal (por ejemplo, un diodo) a la suma de la moduladora más la portadora  $V_s(t) = x(t) + \cos(\omega_p t)$ , se puede generar una modulación de amplitud.

$$V_d(t) = a_0 + a_1 V_s(t) + a_2 V_s^2(t) + \dots =$$

$$a_0 + a_1 (x(t) + \cos(\omega_p t)) + a_2 (x(t) + \cos(\omega_p t))^2 + \dots =$$

$$a_0 + a_1 x(t) + a_1 \cos(\omega_p t) + a_2 (x^2(t) + \cos^2(\omega_p t) + 2x(t) \cos(\omega_p t)) + \dots$$

## Particularización a AM

Para una modulación AM interesan los términos  $a_1 \cos(\omega_p t)$  (contiene la portadora), y  $a_2 2x(t) \cos(\omega_p t)$  (contiene las bandas laterales desplazadas):

$$V_0(t) = a_1 \cos(\omega_p t) + 2a_2 x(t) \cos(\omega_p t) = a_1 \cos(\omega_p t) \left( 1 + 2 \frac{a_2}{a_1} x(t) \right)$$

El índice de modulación es  $m = 2 \frac{a_2}{a_1}$ . Interesa que  $a_0 \rightarrow 0$ .

# Modulador balanceado para generación de DBL

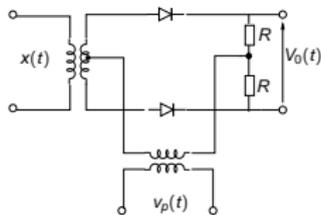


Figura: Modulador Balanceado

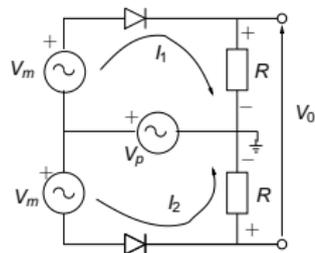


Figura: Circuito equivalente

## Análisis simplificado del circuito

Por el lema de las tensiones de Kirchoff se tiene que  $V_0 = R(I_1 - I_2)$ . El diodo produce unas corrientes  $I_1$  y  $I_2$  no lineales ( $V_0 \ll V_m, V_p, V_d$ ), con  $V_d$  tensión en el diodo):

$$I_1 = a_0 + a_1(V_m + V_p) + a_2(V_m + V_p)^2 + \dots$$

$$I_2 = a_0 + a_1(-V_m + V_p) + a_2(-V_m + V_p)^2 + \dots$$

$$I_1 - I_2 = 2a_1V_m + 4a_2V_mV_p + \dots \rightarrow \text{Restando las dos anteriores}$$

**Desaparece la componente continua.** El término  $a_1$  de portadora es de baja frecuencia y se elimina por filtrado. El **segundo término** contiene el producto de dos señales. Es la **modulación DBL**.



# Ejercicio propuesto

Teniendo en cuenta que  $v_s \ll v_m, v_p, v_d$ , siendo  $v_d$  la tensión en bornes de los diodos:

- Represente el circuito equivalente del circuito y encuentre la expresión de la señal de salida  $v_s$ .
- ¿Qué tipo de modulación se obtiene?. En caso de tratarse de una modulación AM, ¿cuál es el índice de modulación?.
- Identifique las componentes indeseadas de  $v_s$  e indique de qué forma las eliminaría.

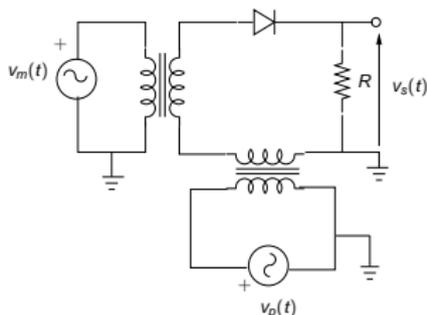


Figura: Mezclador básico con un diodo.

# Ejercicio propuesto

Responda a las mismas cuestiones que en el ejercicio anterior para el circuito de la figura.

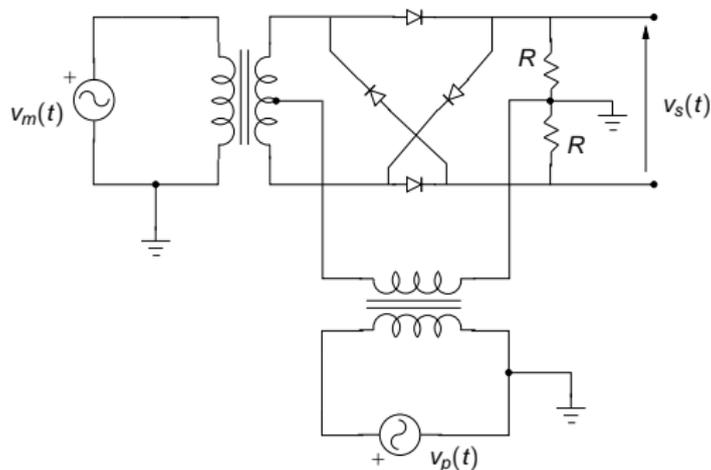


Figura: Mezclador doblemente equilibrado con puente de diodos.

# Ejercicio Propuesto

Se tiene el modulador de amplitud cuyo circuito se detalla en la figura.

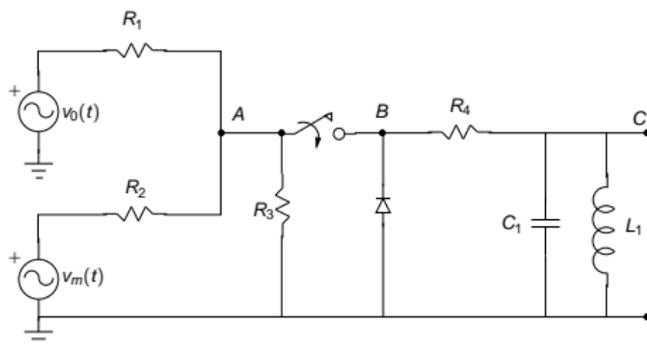


Figura: Esquema simple de un modulador AM.

**Datos:**  $v_0(t) = \sin(\omega_0 t)$      $v_m(t) = \sin(\omega_m t)$      $f_0 = 100 \text{ KHz}$      $f_m = 5 \text{ KHz}$   
 $R_1 = 714,28 \Omega$      $R_2 = 5 \text{ K}\Omega$      $R_3 = 2,5 \text{ K}\Omega$

# Ejercicio propuesto

- Con el interruptor abierto encontrar la tensión en el punto A. Demuestre que dicha tensión es de la forma:

$$v_A(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \sin(\omega_m t)$$

Encuentre el valor de las constantes  $a$  y  $b$ . Dibuje el espectro aproximado de esta señal.

- El diodo es un dispositivo de ley cuadrática de la siguiente forma:  
 $v_B(t) = v_A^2(t) + v_A(t)$ . Encuentre la expresión analítica de la señal  $v_B(t)$  en el punto B al cerrar el interruptor. Dibuje aproximadamente el espectro de la señal obtenida.
- El filtro compuesto por los elementos  $C_1$  y  $L_1$  es un filtro centrado en  $f_0$  y de ancho de banda 20KHz. Encontrar la expresión de la señal en el punto C del circuito. ¿Qué tipo de modulación lleva esa señal?. Calcule el índice de modulación. Dibujar el espectro aproximado a la salida del filtro. ¿Podría detectar correctamente esta señal con un detector de envolvente?. ¿Y si toma  $b = 0,7$ ?, ¿podría en este caso detectar la señal con un detector de envolvente?. Razone todas las respuestas.
- Se tiene una ley cuadrática  $v_B(t) = v_A^2(t)$ . ¿Qué tipo de modulación obtendrá a la salida del modulador (punto C)?. Dibuje el espectro aproximado de la señal en el punto C. ¿Puede usar un detector de envolvente?.

# Modulación AM utilizando un modulador equilibrado

- Interesa que los dispositivos no lineales tengan un **comportamiento parabólico** ( $kx^2$ ) (implementan el producto de señales). Es posible un buen comportamiento parabólico con **transistores de efecto de campo (FET)**.
- Para generar una modulación AM con sólo dispositivos de ley cuadrática es difícil controlar el **índice de  $m$** , ya que depende de los **parámetros internos del diodo o transistor FET** (de la fabricación).
- El índice de modulación se puede controlar con una suma de señales que controle la amplitud (primer circuito de la práctica 1) o con el esquema que se muestra a continuación.

## AM con Mod. Equi.

- 1 En primer lugar una **modulación DBL**.
- 2 El amplificador controla el nivel de señal respecto a la portadora.
- 3 Finalmente se **suma la portadora** para conseguir la AM.

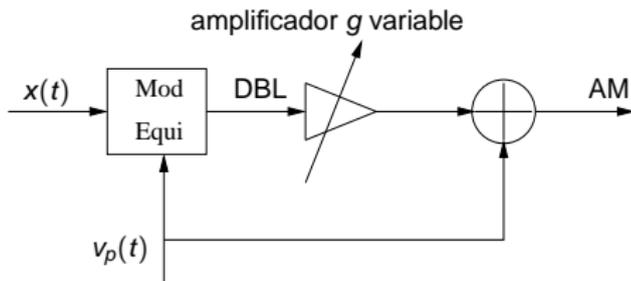


Figura: Modulación AM con MOD Equilibrado

# Modulación en Banda Lateral Única (BLU)

- **Toda la información** de la señal va contenida **en una de las bandas laterales** (si se transmiten las 2 se malgasta potencia y espectro).
- Se puede obtener la **señal DBL y filtrar** una de las bandas laterales para conseguir una BLU.
- Al encontrarse las **bandas laterales muy próximas es difícil hacer filtros selectivos** (mejor señales con poco contenido en baja frecuencia).
- Se puede **eliminar una banda lateral** trabajando con una **subportadora a frecuencia más baja**, y **posteriormente se pasa a la frecuencia de portadora final**.

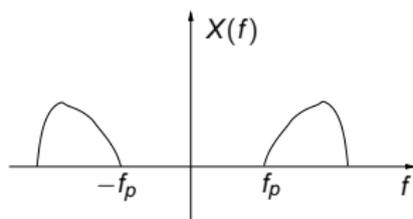


Figura: Señal BLU

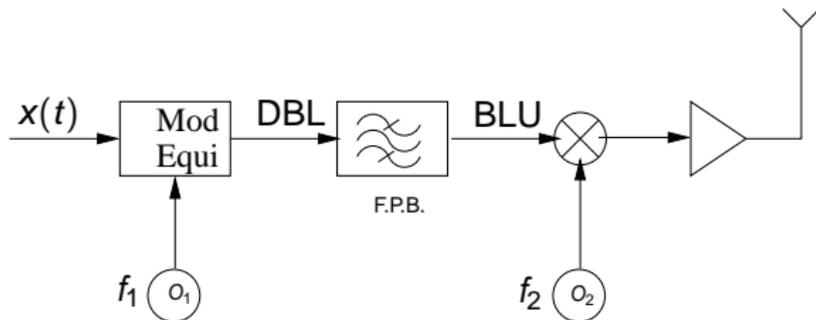


Figura: Modulador BLU con doble traducción de frecuencia



# Modulación BLU utilizando la transformada de Hilbert

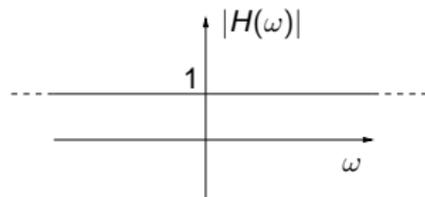
- Una señal en BLU se puede escribir como:

$$x_c(t) = \frac{A_c}{2} x(t) \cos(\omega_p t) \mp \frac{A_c}{2} \hat{x}(t) \cos(\omega_p t - \pi/2)$$

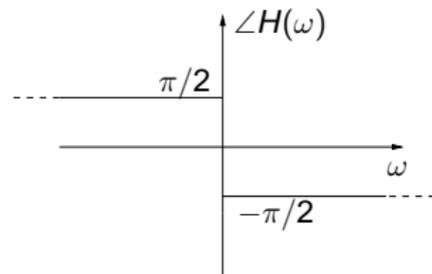
- Dependiendo del signo se tiene banda lateral superior (-) o inferior (+).
- $\hat{x}(t)$  es la transformada de Hilbert de la señal  $x(t)$ , en espectro se tiene:

$$\hat{X}(\omega) = -jX(\omega) \operatorname{sgn}(\omega), \text{ siendo } \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega > 0 \\ -1 & \text{si } \omega < 0 \end{cases}$$

- La transformada de Hilbert (T.H.) desfasa  $(-\pi/2)$  para  $\omega > 0$  y  $\pi/2$  para  $\omega < 0$ .



**Figura:** Módulo de la función de transferencia de la T.H.



**Figura:** Fase de la función de transferencia de la T.H.

# Implementación de la T.H.

## Inconvenientes

- Es difícil desfasar la señal  $\pi/2$  en toda la banda que ocupa.
- $x(t)$  no suele ser un tono, ocupa un ancho de banda y es complicado un desfasaje perfecto.
- Aparecen imperfecciones, con una banda lateral no deseada adicional.

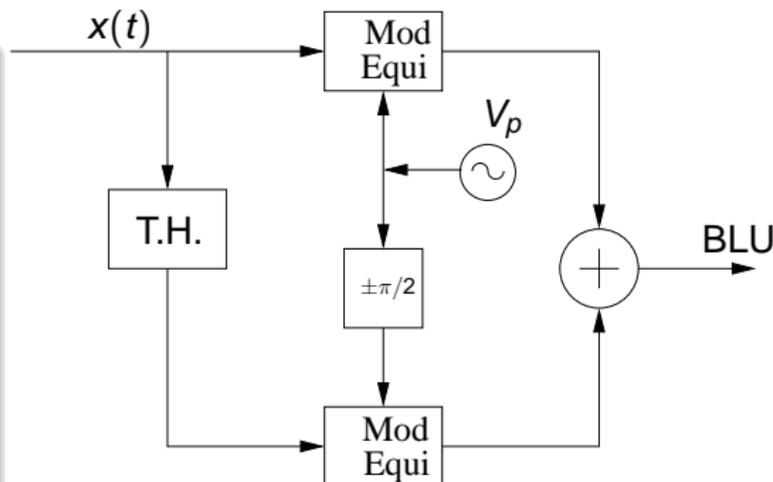


Figura: Modulador BLU mediante T.H.

Para un tono modulado en BLUI, se tiene:

$$V_0(t) = \cos(\omega_m t) \cos(\omega_p t) + \sin(\omega_m t) \sin(\omega_p t)$$

$$V_0(t) = \cos((\omega_m - \omega_p)t)$$

La T.H. de  $\cos(\omega_m t)$  es  $\sin(\omega_m t)$  (demuéstrelo)

# Demodulación BLU y DBL

Para **AM con  $m < 1$**  se utiliza el **detector de envolvente**.

Para BLU o DBL, se parte de la señal modulada con la expresión general:

$$V_0(t) = x(t) \cos(\omega_p t) + \hat{x}(t) \sin(\omega_p t)$$

- Si  $\hat{x}(t) = 0$  se tiene una modulación dBL.
- Si  $\hat{x}(t) \neq 0$  se tiene una BLU.
- En ambos casos la **información no está en la envolvente**.

Por ejemplo, para  $x(t) = \cos(\omega_m t)$ ,  $\hat{x}(t) = \sin(\omega_m t)$ , y

$$V_0(t) = \cos(\omega_m t) \cos(\omega_p t) + \sin(\omega_m t) \sin(\omega_p t) = \cos((\omega_p - \omega_m)t).$$

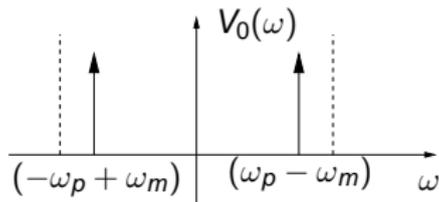


Figura: Espectro de una BLU

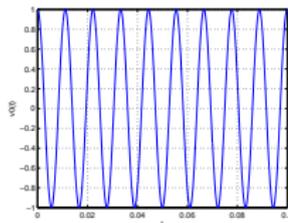


Figura: BLU en el tiempo

# Demodulación BLU y DBL

## Detección coherente

- Para detectar la señal no se puede usar un detector de envolvente.
- El oscilador debe tener la frecuencia y la fase de la portadora.
- En A aparecen armónicos a frecuencia doble que son eliminados con un filtro paso bajo

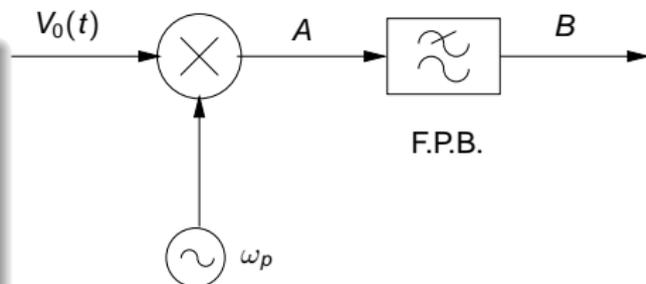


Figura: Demodulador BLU (multiplicador y filtro paso bajo)

En A se tiene:

$$V_A(t) = V_0(t) \cos(\omega_p t) = \left( x(t) \cos(\omega_p t) + \hat{x}(t) \sin(\omega_p t) \right) \cos(\omega_p t) =$$

$$x(t) \cos^2(\omega_p t) + \hat{x}(t) \sin(\omega_p t) \cos(\omega_p t) = x(t) \frac{1 + \cos(2\omega_p t)}{2} + \hat{x}(t) \frac{\sin(2\omega_p t)}{2}$$

En B después de filtrar se tiene para BLU y DBL:

$$V_B(t) = \frac{x(t)}{2}$$

# Errores de frecuencia y de fase

Se parte de la expresión  $V_A(t) = V_0(t) \cos((\omega_p + \Delta\omega)t + \Delta\varphi)$ , donde  $\Delta\omega$  es un error de frecuencia y  $\Delta\phi$  un error de fase.

$$\begin{aligned}V_A(t) &= V_0(t) \cos((\omega_p + \Delta\omega)t + \Delta\varphi) \\&= (x(t) \cos(\omega_p t) + \hat{x}(t) \sin(\omega_p t)) \cos((\omega_p + \Delta\omega)t + \Delta\varphi) \\&= x(t) \cos(\omega_p t) \cos((\omega_p + \Delta\omega)t + \Delta\varphi) + \hat{x}(t) \sin(\omega_p t) \cos((\omega_p + \Delta\omega)t + \Delta\varphi) \\&= \frac{x(t)}{2} \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi) + \frac{x(t)}{2} \cos((2\omega_p + \Delta\omega)t + \Delta\varphi) \\&\quad - \frac{\hat{x}(t)}{2} \sin(\Delta\omega t + \Delta\varphi) + \frac{\hat{x}(t)}{2} \sin((2\omega_p + \Delta\omega)t + \Delta\varphi)\end{aligned}$$

Después del filtrado paso bajo queda:

$$V_B(t) = \frac{x(t)}{2} \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi) - \frac{\hat{x}(t)}{2} \sin(\Delta\omega t + \Delta\varphi)$$

**No se obtiene el mensaje intacto** (el mensaje se ve afectado por un coseno de baja frecuencia).

# Ejemplos de errores de fase

- **Ejemplo 1:** DBL ( $\hat{x}(t) = 0$ ) y con sólo error de fase ( $\Delta\omega = 0$ ). Se tiene que  $V_B(t) = \frac{x(t)}{2} \cos(\Delta\varphi)$ . El mensaje de recupera, ya que sólo se ve afectado por una constante que modifica su amplitud. El caso crítico sucede cuando  $\Delta\varphi = \pi/2$ , puesto que  $V_B(t) = 0$ .
- **Ejemplo 2:** BLU con un error de fase  $\hat{x}(t) \neq 0, \Delta\omega = 0$ . Se tiene que:

$$V_B(t) = \frac{x(t)}{2} \cos(\Delta\varphi) - \frac{\hat{x}(t)}{2} \sin(\Delta\varphi)$$

Si  $\Delta\varphi = \pi/2$ , entonces  $V_B(t) = -\frac{\hat{x}(t)}{2}$  (se recupera la T.H. del mensaje)

# Ejercicio propuesto

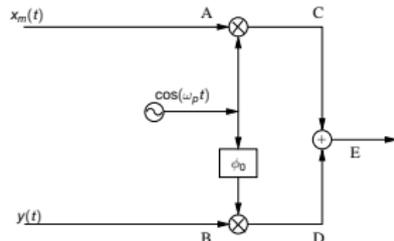


Figura: Diagrama de un modulador genérico.

- Suponiendo que  $x_m(t)$  es una señal moduladora genérica en banda base de espectro limitado ( $X_m(j\omega) = 0$  si  $|\omega| > |\omega_m|$ ), diga que señal de entrada  $y(t)$  y desfase  $\phi_0$  son necesarios para que en el punto  $E$  se obtengan las siguientes modulaciones: Doble banda lateral de amplitud unidad, Banda lateral única superior y AM con índice de modulación  $m = 0,5$ . Dibuje el espectro resultante en cada caso suponiendo que  $\omega_p \gg \omega_m$ . Proponga un detector para cada una de las modulaciones anteriores y dibuje un esquema del mismo.
- Considere que tanto  $x(t)$  como  $y(t)$  son dos señales de información genéricas y que el desfase  $\phi_0 = \pi/2$ . Diseñe un detector para este tipo de modulación. ¿Es posible separar en recepción las dos señales anteriores?. ¿Qué sucede si en el oscilador local de recepción existe un error de fase  $\Delta\phi$ ?

# Apendice: Relaciones trigonométricas útiles

Se recogen las relaciones trigonométricas empleadas en el capítulo.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$