



Estructuras de Edificación: Tema 20 - La pieza recta

David Herrero Pérez

Departamento de Estructuras y Construcción
Universidad Politécnica de Cartagena

Grado en Ingeniería de Edificación
Segundo curso
2011/2012



Resumen parte I

- 1 **Introducción**
- 2 Definiciones y criterio de signos
- 3 Relaciones fundamentales



Resumen parte I

- 1 Introducción
- 2 Definiciones y criterio de signos
- 3 Relaciones fundamentales



Resumen parte I

- 1 Introducción
- 2 Definiciones y criterio de signos
- 3 Relaciones fundamentales



Resumen parte II

- 4 Teoremas de Mohr
- 5 Momentos de empotramiento perfecto
- 6 Factores de transmisión
- 7 Rigideces al giro



Resumen parte II

- 4 Teoremas de Mohr
- 5 Momentos de empotramiento perfecto
- 6 Factores de transmisión
- 7 Rigideces al giro



Resumen parte II

- 4 Teoremas de Mohr
- 5 Momentos de empotramiento perfecto
- 6 Factores de transmisión
- 7 Rigideces al giro



Resumen parte II

- 4 Teoremas de Mohr
- 5 Momentos de empotramiento perfecto
- 6 Factores de transmisión
- 7 Rigideces al giro





Tema 20: Introducción

- 1 Introducción
- 2 Definiciones y criterio de signos
- 3 Relaciones fundamentales

Tema 20 - La pieza recta

- 1 **Introducción**
- 2 Definiciones y criterio de signos
- 3 Relaciones fundamentales

Introducción

Introducción

Una vez realizado el proceso de discretización y definición de los nudos y piezas, los siguientes pasos en el análisis de una estructura consisten en:

- Establecer las ecuaciones que rigen el comportamiento de cada una de las piezas de la estructura.
- Establecer el comportamiento global de la estructura → Imponer las condiciones de **compatibilidad** y **equilibrio**.

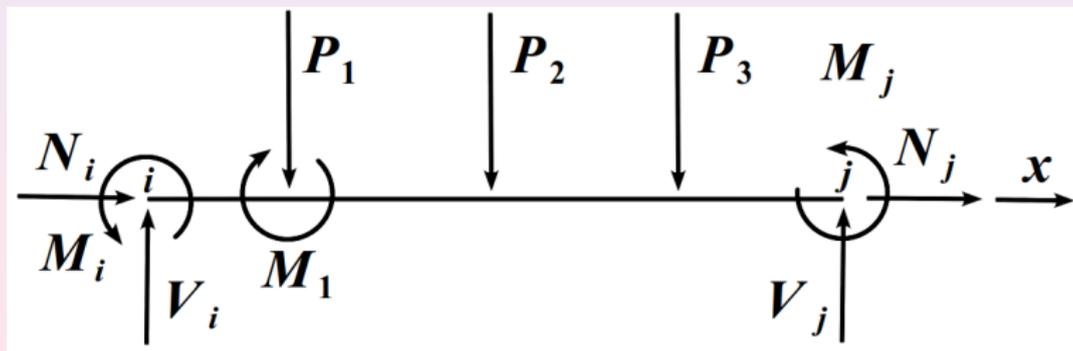
Tema 20 - La pieza recta

- 1 Introducción
- 2 Definiciones y criterio de signos
- 3 Relaciones fundamentales

Definiciones y criterio de signos

Definición de pieza recta

La **pieza recta** es el elemento básico para el análisis de las estructuras de barras de nudos rígidos o estructuras reticulares.



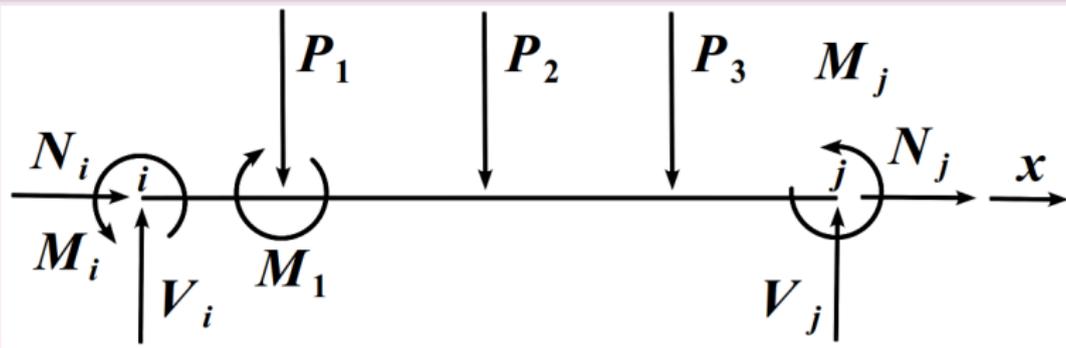
Acciones exteriores y reacciones de sustentación en los extremos de la pieza ij .

Definiciones y criterio de signos

Criterio de signos - Extremos de la pieza

Para las reacciones de sustentación, en cualquier extremo de la pieza, se adopta el criterio:

- **Momentos:** Positivos en el sentido de las agujas del reloj.
- **Fuerzas verticales:** Positivas hacia arriba.
- **Fuerzas horizontales:** Positivas hacia la derecha.



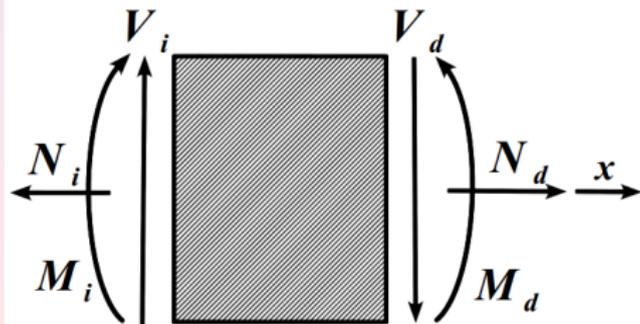
Acciones exteriores y reacciones de sustentación en los extremos de la pieza ij .

Definiciones y criterio de signos

Criterio de signos - Sección de la pieza

Se denominan esfuerzos a las fuerzas que se ejercen sobre una sección de la pieza cuando se expresan según los ejes principales de la misma:

- **Esfuerzo axial** (N_j): Fuerza en el eje longitudinal de la pieza.
- **Esfuerzo cortante** (V_k): Fuerza perpendicular al eje longitudinal de la pieza.
- **Momento flector** (M_k): Momento del eje perpendicular al plano.



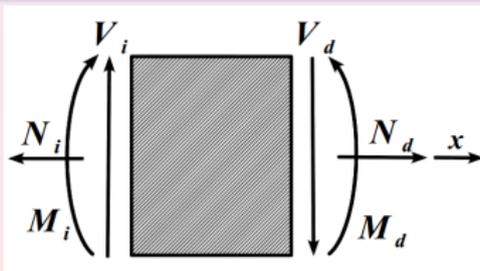
Esfuerzos positivos.

Definiciones y criterio de signos

Criterio de signos - Sección de la pieza

Para los esfuerzos se considera un criterio de signos asociado al efecto que los esfuerzos producen sobre la sección:

- **Esfuerzos axiales positivos:** Producen un alargamiento en la sección (los negativos acortan la sección).
- **Esfuerzos cortante positivos:** Se relacionan directamente con los momentos flectores.
- **Momentos flectores positivos:** Producen tracción en las fibras inferiores de la sección (los negativos producen compresión).



Esfuerzos positivos.

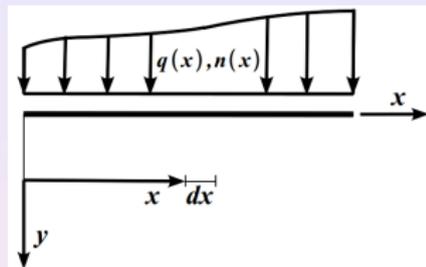
Tema 20 - La pieza recta

- 1 Introducción
- 2 Definiciones y criterio de signos
- 3 Relaciones fundamentales**

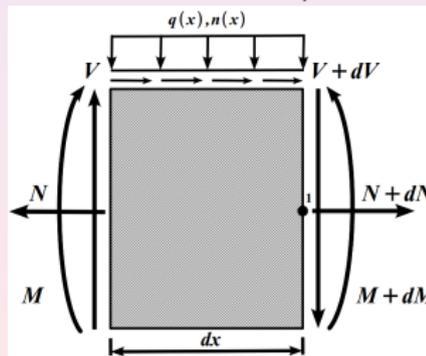
Relaciones fundamentales - Equilibrio

Condiciones de equilibrio

- Dada la siguiente pieza y los esfuerzos (M , N y V) en la sección transversal de la abscisa x .
- Al incrementarse la abscisa ($x+dx$) en la sección transversal se producen cambios diferenciales en los esfuerzos (dM , dN y dV) y en las intensidades de las cargas.
- Se desprecia el cambio en las intensidades de las cargas al ser dx suficientemente pequeño.



Esfuerzos en una pieza.



Esfuerzos en una sección de la pieza.

Relaciones fundamentales - Equilibrio

Equilibrio en la dirección del eje vertical

Aplicando equilibrio en la sección transversal:

$$\sum F_y = -V + q \cdot dx + (V + dV) = 0$$

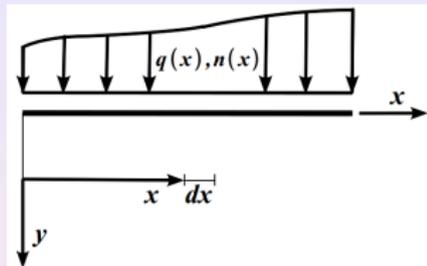
operando se obtiene: $q = -\frac{dV}{dx}$.

Equilibrio en la dirección del eje horizontal

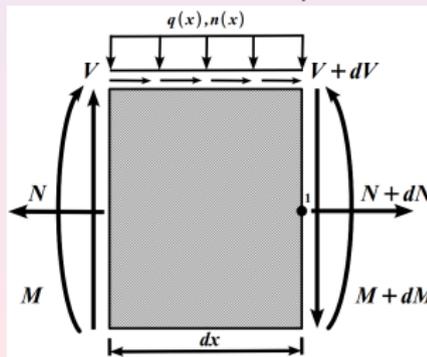
Aplicando equilibrio en la sección transversal:

$$\sum F_x = -N + n \cdot dx + (N + dN) = 0$$

operando se obtiene: $n = -\frac{dN}{dx}$.



Esfuerzos en una pieza.



Esfuerzos en una sección de la pieza.

Relaciones fundamentales - Equilibrio

Equilibrio de momentos

Aplicando equilibrio respecto el punto 1:

$$\sum M_1 = M + v \cdot dx - q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0$$

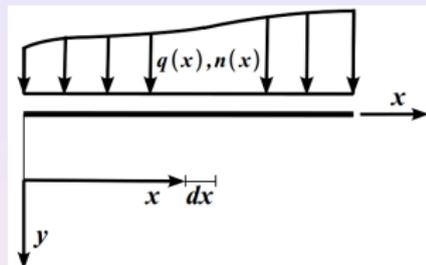
despreciando el término $\frac{dx}{2}$ se obtiene: $V = \frac{dM}{dx}$.

Expresión diferencial de equilibrio

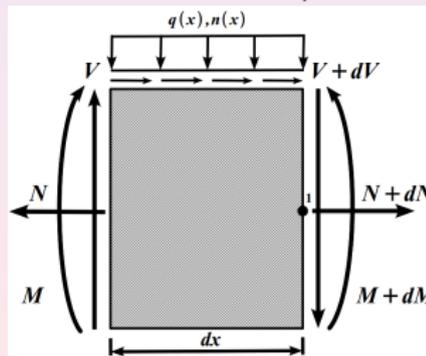
Sustituyendo en las expresiones anteriores, se obtiene:

$$q = -\frac{d}{dx} \left(\frac{dM}{dx} \right) = -\frac{d^2 M}{dx^2}$$

que se conoce como la expresión diferencial de equilibrio cuando solamente hay momentos y fuerzas perpendiculares al eje longitudinal.



Esfuerzos en una pieza.

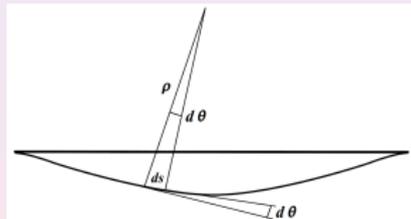


Esfuerzos en una sección de la pieza.

Relaciones fundamentales - Compatibilidad

Condiciones de compatibilidad

- La pieza debe deformarse de forma continua, excepto en los puntos en los que exista discontinuidad \rightarrow articulaciones en los extremos o en el interior de la pieza.
- Es decir, los desplazamientos deben ser compatibles con las curvaturas y con las discontinuidades en las deformaciones.



Elástica de la pieza.

Relaciones fundamentales - Compatibilidad

Curvatura (κ) de la pieza recta

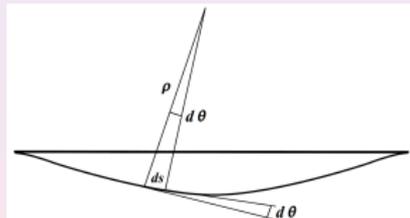
Teniendo en cuenta que la curvatura (κ) es la variación del ángulo de inclinación de la curvatura respecto a la distancia a su largo:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds}$$

Puesto que $\theta = \arctan(dy)$, se tiene:

$$\frac{d\theta}{dx} = - \frac{d^2y}{1 + (dy)^2}$$

siendo el signo negativo debido a que, para momentos positivos, la pendiente disminuye al aumentar x .



Elástica de la pieza.

Relaciones fundamentales - Compatibilidad

Curvatura (κ) de la pieza recta

La longitud del arco es $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, por lo que la derivada respecto x será:

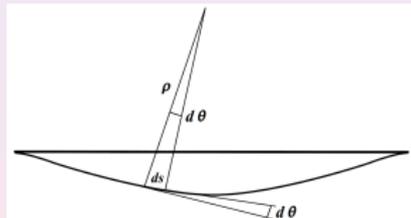
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + dy^2}$$

Operando con las expresiones anteriores se obtiene:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = -\frac{d^2y}{(1 + dy^2)^{3/2}}$$

y aplicando la hipótesis de pequeños desplazamientos ($dy^2 \ll 1$) se obtiene:

$$-d^2y = -\frac{d^2y}{dx^2}$$



Elástica de la pieza.

Relaciones fundamentales - Comportamiento

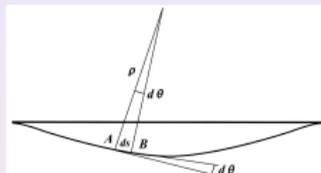
Condiciones de equilibrio

- Sea la siguiente pieza y un elemento comprendido entre las secciones transversales A y B .
- Si se consideran únicamente las deformaciones por flexión, las secciones transversales planas antes de la deformación permanecerán planas después de la deformación.
- Por lo que la deformación longitudinal unitaria de una fibra CD , vendrá dada por:

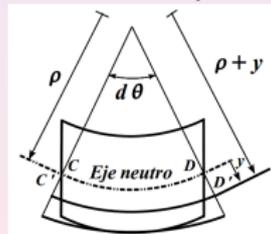
$$\varepsilon = \frac{C'D' - CD}{CD} = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} = y\kappa = \frac{d\theta}{ds}y$$

para materiales que cumplen la ley de Hooke ($\sigma = \varepsilon E$) se cumple que el valor de la tensión normal de una fibra situada a una distancia y del eje neutro es:

$$\sigma = Ey \frac{d\theta}{ds}$$



Elástica de la pieza.



Sección tras la deformación.

Relaciones fundamentales - Comportamiento

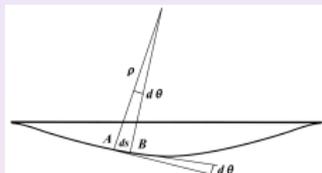
Relación momento-curvatura

- Para que se cumpla el equilibrio de momentos en la sección, el momento flector tiene que ser igual al momento producido por las secciones normales:

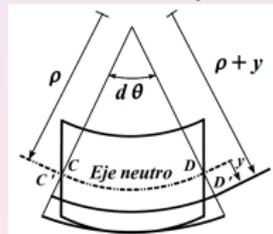
$$M(x) = \int_s \sigma b y dy = E \frac{d\theta}{ds} \int_s b y^2 dy = EI(x) \frac{d\theta}{ds} = EI(x) \kappa$$

siendo b el ancho de la sección transversal a la distancia y del eje neutro.

- Esta relación momento-curvatura es una forma de tener en cuenta la ley de comportamiento del material más cómoda que la ley de Hooke, ya que permite trabajar con esfuerzos en secciones (en lugar de tensiones en puntos).



Elástica de la pieza.



Sección tras la deformación.



Tema 20: Teoremas y relaciones fundamentales

- 4 Teoremas de Mohr
- 5 Momentos de empotramiento perfecto
- 6 Factores de transmisión
- 7 Rigideces al giro

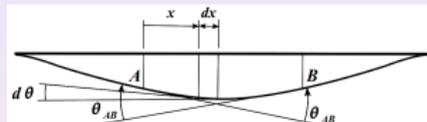
Tema 20 - La pieza recta

- 4 Teoremas de Mohr
- 5 Momentos de empotramiento perfecto
- 6 Factores de transmisión
- 7 Rigideces al giro

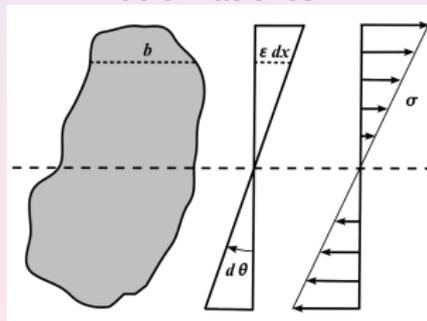
Teoremas de Mohr

Primer Teorema de Mohr

- Sea la siguiente pieza y dos secciones separadas un dx , situada una de ellas en un punto de la abscisa x .
- La ley de Hooke establece que la tensión en un punto de la sección transversal viene dado por $\sigma = \varepsilon E$, siendo ε la deformación unitaria en ese punto.
- La hipótesis de Navier (las secciones planas antes de la deformación permanecen planas después de la deformación), se puede expresar como $\varepsilon = y \frac{d\theta}{ds}$, siendo la tensión a la distancia del eje neutro $\sigma = Ey \frac{d\theta}{ds}$.



Desplazamientos, giros y deformaciones.



Tensiones y deformaciones.

Teoremas de Mohr

Primer Teorema de Mohr

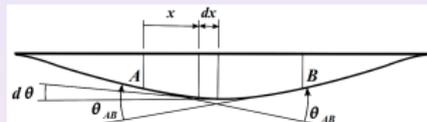
- Igualando el momento flector al momento producido por las tensiones, se tiene:

$$M(x) = \int_s \sigma b y dy = E \frac{d\theta}{ds} \int_s b y^2 dy = EI(x) \frac{d\theta}{ds}$$

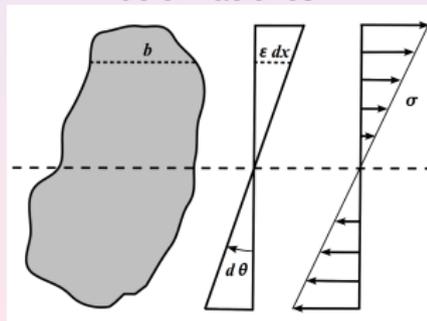
siendo b el ancho de la sección transversal en el punto considerado e $I(x)$ el momento de inercia de la sección transversal.

- Despejando $d\theta$ se obtiene el ángulo diferencial entre dos secciones separadas ds . Integrando entre los puntos A y B se obtiene:

$$\theta_{AB} = \int_A^B \frac{M(x)}{EI(x)} ds$$



Desplazamientos, giros y deformaciones.



Tensiones y deformaciones.

Teoremas de Mohr

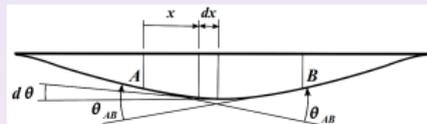
Primer Teorema de Mohr

- Considerando pequeños desplazamientos, se puede sustituir el arco por la distancia horizontal, con lo que la expresión anterior queda en la forma:

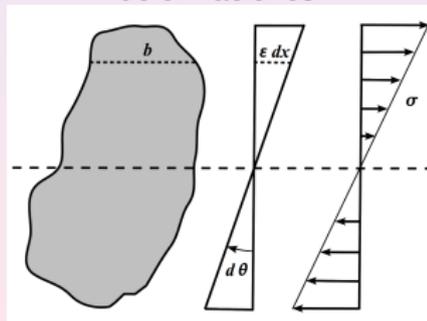
$$\theta_{AB} = \int_A^B \frac{M(x)}{EI(x)} dx$$

que es la expresión del primer teorema de Mohr.

- Enunciado del primer teorema de Mohr: "El ángulo (θ_{AB}) entre las tangentes a la elástica en dos puntos A y B, viene dado por el área del diagrama de momentos flectores dividido por $EI(x)$, entre esos puntos".



Desplazamientos, giros y deformaciones.



Tensiones y deformaciones.

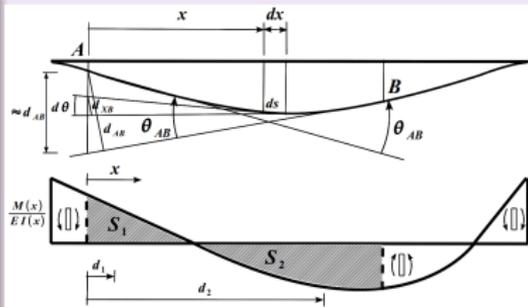
Teoremas de Mohr

Segundo Teorema de Mohr

- La distancia mínima (d_{XB}) desde la tangente a la elástica en el punto $x + dx$ y el punto de intersección de la vertical que pasa por el punto A con la tangente a la elástica en el punto de abscisa x es $d_{XB} = xd\theta$.
- Aplicando el primer teorema de Mohr e integrando esta expresión entre los puntos A y B se obtiene la distancia mínima desde la tangente a la elástica en el punto B y el punto A de la elástica:

$$d_{AB} = \int_A^B \frac{M(x)x}{EI(x)} dx$$

que es la expresión correspondiente al segundo teorema de Mohr.



Deformada y diagrama de momentos flectores dividido por $EI(x)$.

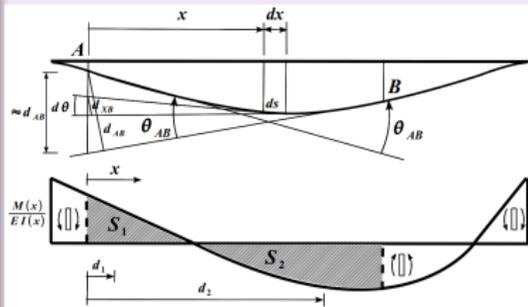
Teoremas de Mohr

Segundo Teorema de Mohr

- Enunciado: "La distancia mínima desde un punto A de la elástica hasta la tangente a otro punto B de la elástica, es igual al momento elástico del área del diagrama de momentos flectores dividida por $EI(x)$, respecto al punto A ".
- Dado que el ángulo θ_{AB} es muy pequeño, la distancia d_{AB} puede asimilarse a la distancia vertical entre el punto A de la elástica y la tangente a la misma por el punto B .
- Para el ejemplo que se muestra se tiene:

$$\theta_{AB} = -S_1 + S_2$$

$$d_{AB} = -S_1 d_1 + S_2 d_2$$



Deformada y diagrama de momentos flectores dividido por $EI(x)$.

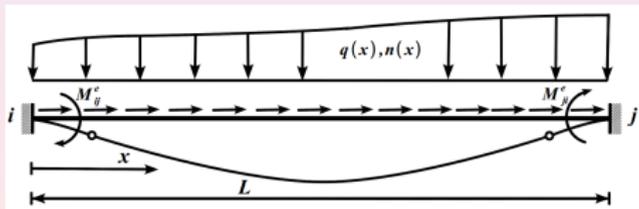
Tema 20 - La pieza recta

- 4 Teoremas de Mohr
- 5 Momentos de empotramiento perfecto**
- 6 Factores de transmisión
- 7 Rigideces al giro

Pieza empotrada-empotrada

Pieza empotrada-empotrada

- Sea la pieza ij con los giros y desplazamientos impedidos en ambos extremos.
- Número de reacciones: 6 (2 momentos y 4 fuerzas).
- Número de ecuaciones de equilibrio: 3 ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M = 0$).
- Grado de hiperestaticidad: 3 \rightarrow Las 3 expresiones que faltan se pueden obtener de la ley de Hooke, teoremas de Mohr, segundo teorema de Castigliano, teorema de las fuerzas virtuales . . .



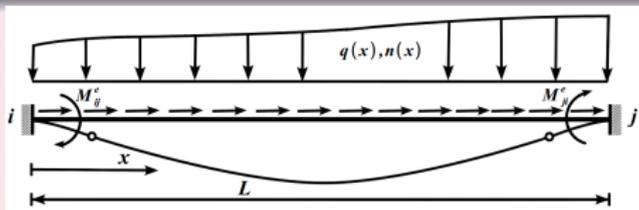
*Pieza empotrada-empotrada.
Momentos de empotramiento perfectos.*

Pieza empotrada-empotrada

Pieza empotrada-empotrada

Puesto que las deformaciones axiales dependen solamente de la proyección de las cargas exteriores sobre el eje longitudinal de la pieza, se puede descomponer el problema en dos:

- Uno en el que solo se consideren las fuerzas en la dirección del eje longitudinal de la pieza.
- Otro en el que se consideren los momentos y las fuerzas perpendiculares al eje (siendo 2 el número de incógnitas hiperestáticas).



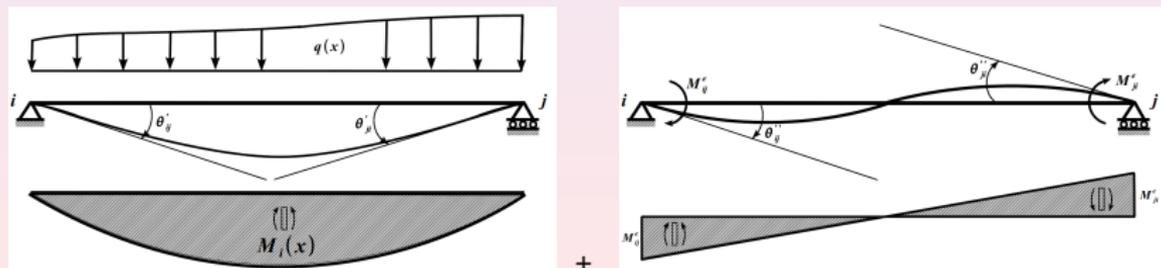
*Pieza empotrada-empotrada.
Momentos de empotramiento perfectos.*

Pieza empotrada-empotrada

Pieza empotrada-empotrada

Tomando los momentos de empotramiento perfecto (M_{ij}^e , M_{ji}^e) como incógnitas hiperestáticas, se puede descomponer el problema anterior en dos problemas isostáticos, con la condición de que los giros totales sean cero:

- $\theta_{ij} = \theta'_{ij} + \theta''_{ij} = 0$.
- $\theta_{ji} = \theta'_{ji} + \theta''_{ji} = 0$.



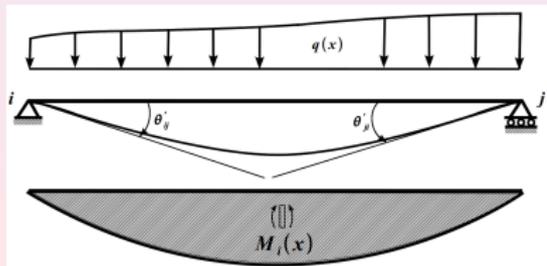
Descomposición en problemas isostáticos.

Pieza empotrada-empotrada

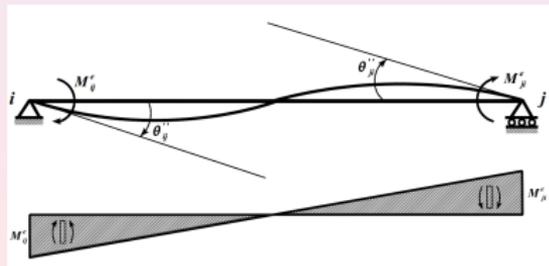
Pieza empotrada-empotrada

Aplicando el principio de superposición, la ley de momentos flectores total será:

$$M(x) = M_i(x) + M_{ij}^e - \frac{M_{ij}^e + M_{ji}^e}{L} x = M_i(x) + \frac{M_{ij}^e}{L} (L - x) - \frac{M_{ji}^e}{L} x$$



+



Descomposición en problemas isostáticos.

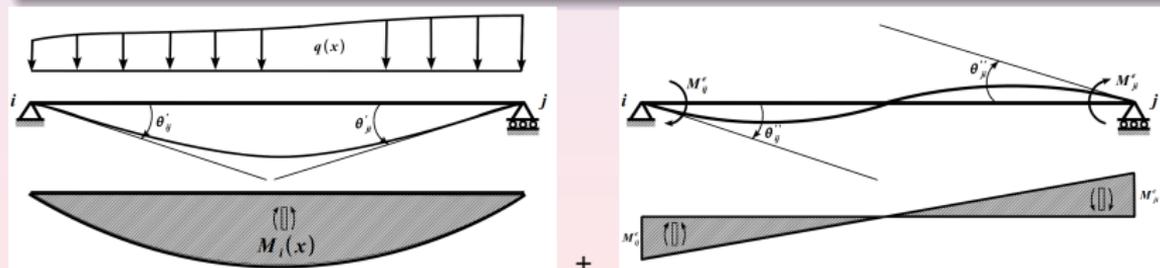
Pieza empotrada-empotrada

Pieza empotrada-empotrada

De acuerdo al primer teorema de Mohr, e imponiendo la condición de que el ángulo entre las tangentes de la elástica en los puntos extremos sea cero, se tiene:

$$\theta_{ij} = \int_i^j \frac{M(x)}{EI(x)} dx = \int_i^j \frac{M(x)\tau(x)}{El_0} dx$$

siendo $\tau(x) = \frac{l_0}{I(x)}$ e l_0 el momento de inercia mínimo de la pieza.



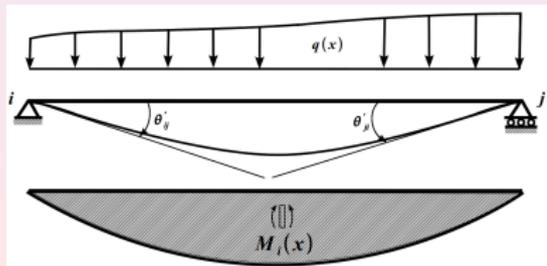
Descomposición en problemas isostáticos.

Pieza empotrada-empotrada

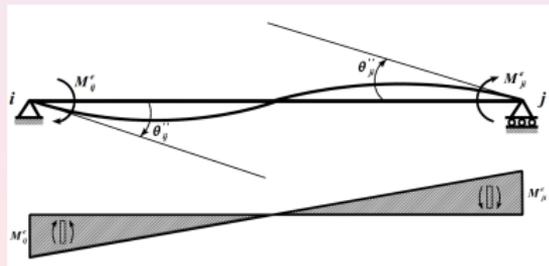
Pieza empotrada-empotrada

De acuerdo con el segundo teorema de Mohr, e imponiendo la condición de que la distancia a la tangente de la elástica desde el extremo j hasta el extremo i sea cero, se tiene:

$$d_{ij} = \int_i^j \frac{M(x)x}{EI(x)} dx = \int_i^j \frac{M(x)xT(x)}{EI_0} dx$$



+



Descomposición en problemas isostáticos.

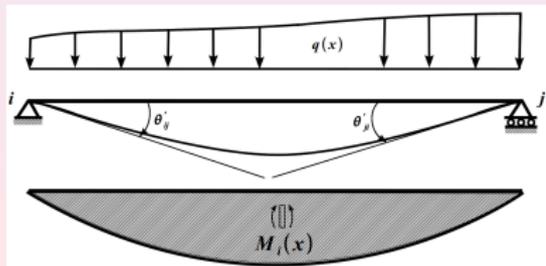
Pieza empotrada-empotrada

Pieza empotrada-empotrada

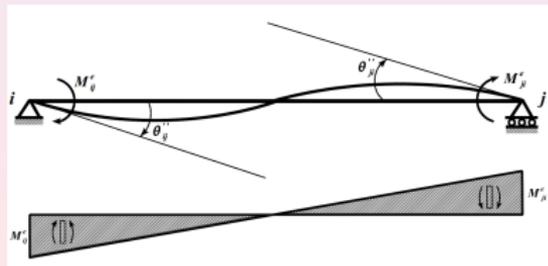
Sustituyendo en las dos ecuaciones la expresión del momento flector en un punto x , y sacando fuera de las integrales los términos constantes, se tiene:

$$\int_i^j M_i(x)\tau(x)dx + \frac{M_{ij}^e}{L} \int_i^j (L-x)\tau(x)dx - \frac{M_{ji}^e}{L} \int_i^j x\tau(x)dx = 0$$

$$\int_i^j M_i(x)x\tau(x)dx + \frac{M_{ij}^e}{L} \int_i^j (L-x)x\tau(x)dx - \frac{M_{ji}^e}{L} \int_i^j x^2\tau(x)dx = 0$$



+



Descomposición en problemas isostáticos.

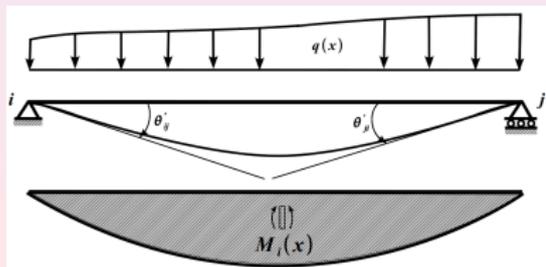
Pieza empotrada-empotrada

Pieza empotrada-empotrada

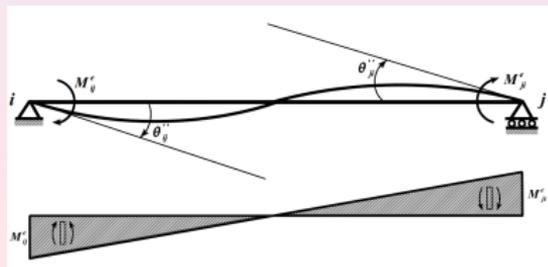
De estas dos ecuaciones con dos incógnitas se obtiene:

$$M_{ij}^e = - \frac{\int_i^j M_i(x) x \tau(x) dx \int_i^j x \tau(x) dx - \int_i^j M_i(x) \tau(x) dx \int_i^j x^2 \tau(x) dx}{\int_i^j x \tau(x) dx \int_i^j (L-x) \tau(x) dx - \int_i^j (L-x) \tau(x) dx \int_i^j x^2 \tau(x) dx} L$$

$$M_{ji}^e = - \frac{\int_i^j M_i(x) \tau(x) dx \int_i^j (L-x) x \tau(x) dx - \int_i^j M_i(x) x \tau(x) dx \int_i^j (L-x) \tau(x) dx}{\int_i^j x \tau(x) dx \int_i^j (L-x) x \tau(x) dx - \int_i^j (L-x) \tau(x) dx \int_i^j x^2 \tau(x) dx} L$$



+



Descomposición en problemas isostáticos.

Pieza empotrada-articulada

Pieza empotrada-articulada

- Sea la pieza ij , articulada en el extremo i y perfectamente empotrada en el extremo j .

- La ley de momentos flectores es:

$$M(x) = M_i(x) - \frac{M'_{ji}e}{L}x.$$

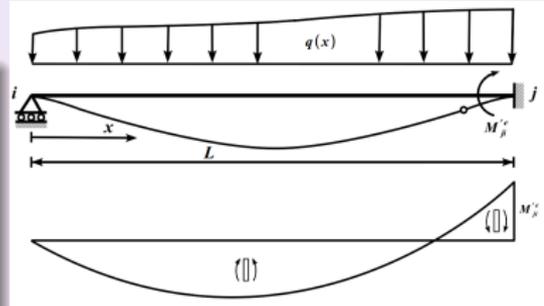
- Aplicando el segundo teorema de Mohr, tenemos:

$$d_{ij} = \int_i^j \frac{M(x)x}{EI(x)} dx =$$

$$\frac{1}{EI_0} \int_i^j \left[M_i(x) - \frac{M'_{ji}e}{L}x \right] x \tau(x) dx = 0$$

de donde se obtiene:

$$M'_{ji}e = \frac{\int_i^j M_i(x)x\tau(x) dx}{\int_i^j x^2\tau(x) dx} L$$



*Pieza empotrada-articulada.
 Momentos de empotramiento perfectos.*

Pieza empotrada-articulada

Pieza articulada-empotrada

- Sea la pieza ij , perfectamente empotrada en el extremo i y articulada en el extremo j .

- La ley de momentos flectores es:

$$M(x) = M_i(x) + M'_{ij}e - \frac{M'_{ij}e}{L}x = M_i(x) + \frac{M'_{ij}e}{L}(L - x)$$

- Aplicando el segundo teorema de Mohr, tenemos:

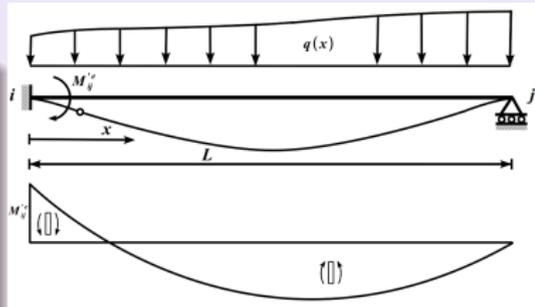
$$d_{ij} = \int_i^j \frac{M(x)(L - x)}{EI(x)} dx = \frac{1}{El_0} \int_i^j M(x)(L - x)\tau(x)dx = 0$$

sustituyendo en la ley de momentos flectores:

$$\int_i^j M_i(x)\tau(x)(L - x)dx + \frac{M'_{ij}e}{L} \int_i^j (L - x)^2\tau(x)dx = 0$$

de donde se obtiene:

$$M'_{ij}e = - \frac{\int_i^j M_i(x)(L - x)\tau(x)dx}{\int_i^j (L - x)^2\tau(x)dx} L$$



*Pieza articulada-empotrada.
 Momentos de empotramiento perfectos.*

Pieza empotrada-articulada

Piezas con inercia constante

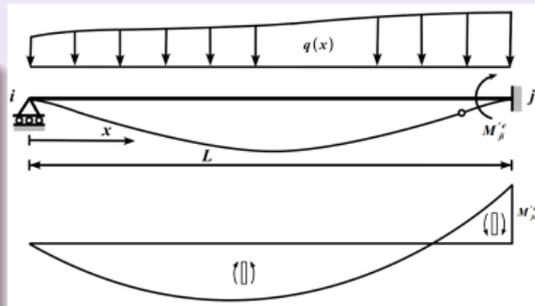
Para piezas con inercia constante ($\tau(x) = 1$) se obtiene:

- Para el caso empotrada-articulada:

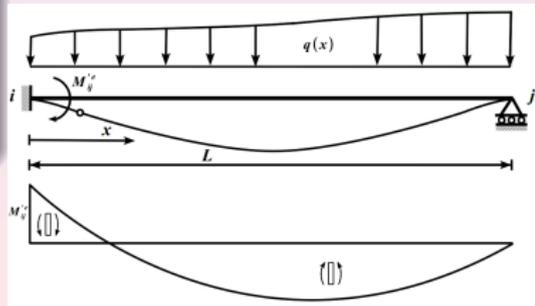
$$M'_{ji}e = \frac{\int_i^j M_i(x) x dx}{\int_i^j x^2 dx} L = \frac{\int_i^j M_i(x) x dx}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L} L = \frac{3 \int_i^j M_i(x) x dx}{L^2}$$

- Para el caso articulada-empotrada:

$$M'_{ij}e = -\frac{\int_i^j M_i(x)(L-x) dx}{\int_i^j (L-x)^2 dx} L = -\frac{\int_i^j M_i(x)(L-x) dx}{\left[\frac{(L-x)^3}{3}\right]_0^L} L = -\frac{3 \int_i^j M_i(x)(L-x) dx}{L^2}$$



Pieza empotrada-articulada.



Pieza articulada-empotrada.

Tema 20 - La pieza recta

- 4 Teoremas de Mohr
- 5 Momentos de empotramiento perfecto
- 6 Factores de transmisión**
- 7 Rigideces al giro

Factores de transmisión

Factores de transmisión

- Sea la pieza ij , articulada en el extremo i y perfectamente empotrada en el extremo j .
- Se le aplica un momento m_i en el extremo i .
- Se define el factor de transmisión (β_{ij}) del extremo i al extremo j como el cociente entre el momento de empotramiento perfecto en j (M_{ji}^e) y el momento (m_i) aplicado en i :

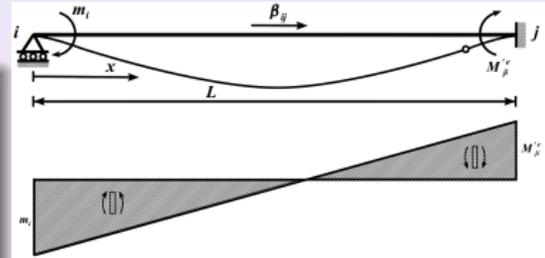
$\beta_{ij} = \frac{M_{ji}^e}{m_i}$, siendo la ley de momentos flectores:

$$M_i(x) = m_i - \frac{m_i}{L}x = \frac{m_i}{L}(L - x)$$

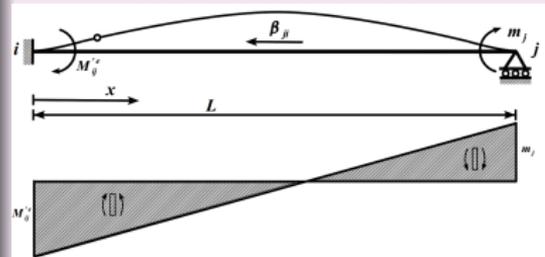
- De la misma forma, se define el factor de transmisión (β_{ji}) del extremo j al extremo i como:

$\beta_{ji} = \frac{M_{ij}^e}{m_j}$, siendo la ley de momentos flectores:

$$M_i(x) = -\frac{m_j}{L}x$$



*Pieza articulada-empotrada.
Factores de transmisión.*



*Pieza empotrada-articulada.
Factores de transmisión.*

Factores de transmisión

Factores de transmisión

- Utilizando la expresión del momento de empotramiento perfecto, y aplicando la ley de momentos flectores, se tiene para el extremo i :

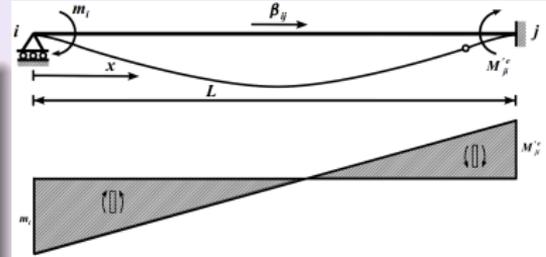
$$\beta_{ij} = \frac{M_{ji}^e}{m_i} = \frac{1}{m_i} \frac{\int_i^j M_i(x) x \tau(x) dx}{\int_i^j x^2 \tau(x) dx} L =$$

$$\frac{1}{m_i} \frac{\int_i^j \frac{m_i}{L} (L-x) x \tau(x) dx}{\int_i^j x^2 \tau(x) dx} L = \frac{\int_i^j (L-x) x \tau(x) dx}{\int_i^j x^2 \tau(x) dx}$$

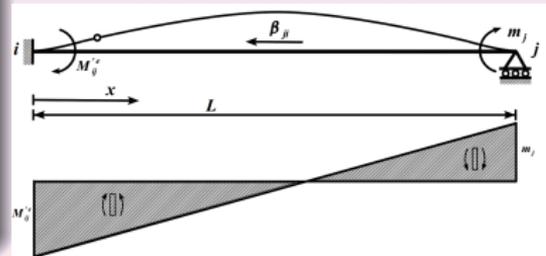
- Operando de forma similar, se tiene para el extremo j :

$$\beta_{ji} = \frac{M_{ij}^e}{m_j} = -\frac{1}{m_j} \frac{\int_i^j M_i(x) (L-x) \tau(x) dx}{\int_i^j (L-x)^2 \tau(x) dx} L =$$

$$-\frac{1}{m_j} \frac{\int_i^j \left(-\frac{m_j}{L} x\right) (L-x) \tau(x) dx}{\int_i^j (L-x)^2 \tau(x) dx} L = \frac{\int_i^j (L-x) x \tau(x) dx}{\int_i^j (L-x)^2 \tau(x) dx}$$



*Pieza articulada-empotrada.
Factores de transmisión.*



*Pieza empotrada-articulada.
Factores de transmisión.*

Factores de transmisión

Factores de transmisión - inercia constante

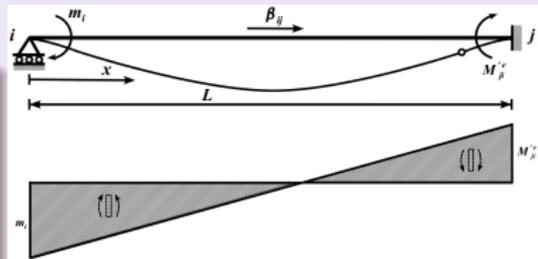
- Para piezas de inercia constante, $\tau(x) = 1$, se tiene:

$$\beta_{ij} = \frac{\int_i^j (L-x)x dx}{\int_i^j x^2 dx} = \frac{\left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^L}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L} = \frac{1}{2}$$

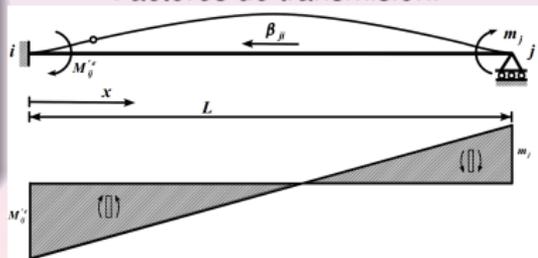
- Del mismo modo, para β_{ji} se tiene:

$$\beta_{ji} = \frac{\int_i^j (L-x)x dx}{\int_i^j (L-x)^2 dx} = \frac{\left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^L}{[L^2x]_0^L + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L - [Lx^2]_0^L} = \frac{1}{2}$$

- Debido a la simetría de la pieza se cumple: $\beta_{ij} = \beta_{ji}$



*Pieza articulada-empotrada.
Factores de transmisión.*



*Pieza empotrada-articulada.
Factores de transmisión.*

Tema 20 - La pieza recta

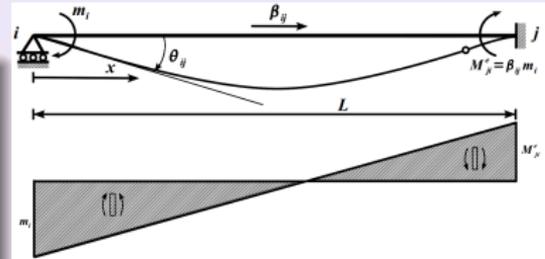
- 4 Teoremas de Mohr
- 5 Momentos de empotramiento perfecto
- 6 Factores de transmisión
- 7 Rigideces al giro**

Rigideces al giro

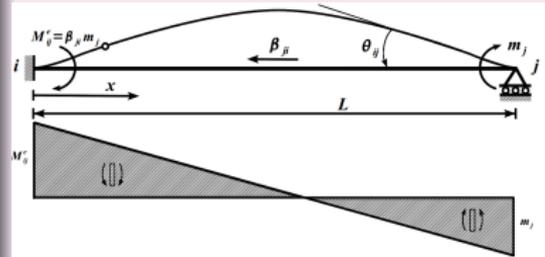
Rigideces al giro en un extremo con el otro extremo empotrado

- Sea la pieza ij , articulada en el extremo i y perfectamente empotrada en el extremo j , a la que se aplica un momento m_i en el extremo i .
- Se define la rigidez al giro en el extremo i al cociente entre el momento aplicado y el giro que se produce: $k_{ij} = \frac{m_i}{\theta_{ij}}$.
- Al aplicar el momento m_i en el extremo i , en el extremo j aparece un momento de empotramiento que es igual al momento aplicado multiplicado por el factor de transmisión del extremo i al j .
- La ley de momentos flectores es:

$$M(x) = m_i - \frac{m_i + M_j^e}{L} x = \frac{m_i}{L} (L - x) - \frac{M_j^e}{L} x$$



*Pieza articulada-empotrada.
Rigidez al giro.*



*Pieza empotrada-articulada.
Rigidez al giro.*

Rigideces al giro

Rigideces al giro en un extremo con el otro extremo empotrado

- Aplicando el primer teorema de Mohr, el ángulo girado en el extremo i vendrá dado por:

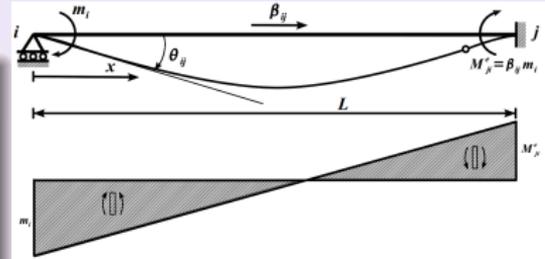
$$\theta_{ij} = \int_i^j \frac{M(x)}{EI(x)} dx = \frac{m_i \int_0^L (L-x)\tau(x) dx - \beta_{ij} \int_0^L x\tau(x) dx}{EI_0 L}$$

- De acuerdo con la definición de rigidez, para el extremo i :

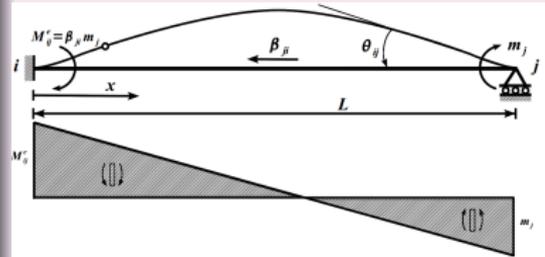
$$k_{ij} = \frac{m_i}{\theta_{ij}} = \frac{EI_0 L}{\int_0^L (L-x)\tau(x) dx - \beta_{ij} \int_0^L x\tau(x) dx}$$

- De igual forma, la rigidez al giro en el extremo j cuando el extremo i esta empotrado:

$$k_{ji} = \frac{m_j}{\theta_{ji}} = \frac{EI_0 L}{\int_0^L x\tau(x) dx - \beta_{ji} \int_0^L (L-x)\tau(x) dx}$$



Pieza articulada-empotrada.
Rigidez al giro.



Pieza empotrada-articulada.
Rigidez al giro.

Rigideces al giro

Rigideces al giro en piezas con inercia constante

- Para piezas con inercia constante, $\tau(x) = 1$,
 $\beta_{ij} = \beta_{ji} = \frac{1}{2}$, se tiene:

$$k_{ij} = \frac{E I_0 L}{\int_0^L (L-x) dx - \beta_{ij} \int_0^L x dx} = \frac{4 E I_0}{L}$$

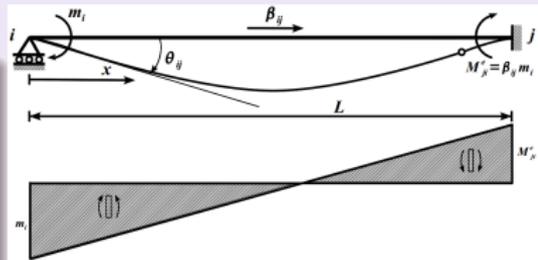
$$\frac{[Lx - \frac{x^2}{2}]_0^L - \frac{1}{2} [\frac{x^2}{2}]_0^L}{L}$$

- De la misma forma, se tiene:

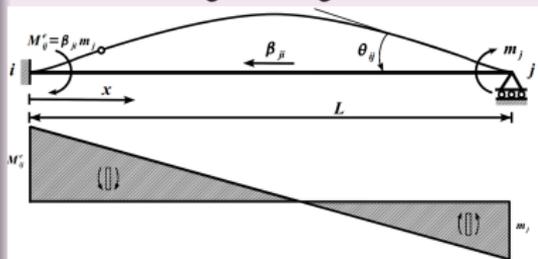
$$k_{ji} = \frac{E I_0 L}{\int_0^L x dx - \beta_{ji} \int_0^L (L-x) dx} = \frac{4 E I_0}{L}$$

$$\frac{[\frac{x^2}{2}]_0^L - \frac{1}{2} [Lx - \frac{x^2}{2}]_0^L}{L}$$

- Por lo que se cumple $k_{ij} = k_{ji}$.



*Pieza articulada-empotrada.
 Rigidez al giro.*



*Pieza empotrada-articulada.
 Rigidez al giro.*

Rigideces al giro

Rigideces al giro en un extremo con el otro extremo articulado

- Sea la pieza ij , articulada en ambos extremos.
- Al aplicar el momento m_i en el extremo i , la ley de momentos flectores es:

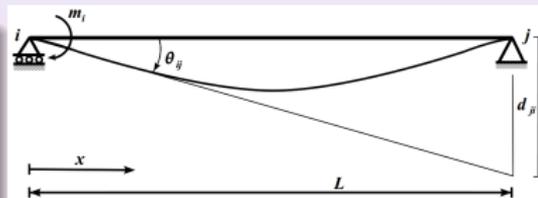
$$M(x) = m_i - \frac{m_i}{L}x = \frac{m_i}{L}(L - x)$$

- Aplicando el segundo teorema de Mohr, se tiene:

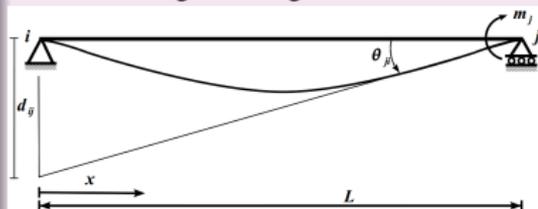
$$\theta_{ij} = \frac{d_{ij}}{L} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M(x)(L-x)}{EI(x)} dx = \frac{m_i \int_0^L (L-x)(L-x)\tau(x) dx}{EI_0 L^2}$$

- Aplicando la definición de rigidez, se tiene:

$$k'_{ij} = \frac{m_i}{\theta_{ij}} = \frac{EI_0 L^2}{\int_0^L (L-x)^2 \tau(x) dx}$$



Pieza articulada-articulada.
 Rigidez al giro en i .



Pieza articulada-articulada.
 Rigidez al giro en j .

Rigideces al giro

Rigideces al giro en un extremo con el otro extremo articulado

- Sea la pieza ij , articulada en ambos extremos.
- Al aplicar el momento m_j en el extremo j , la ley de momentos flectores es:

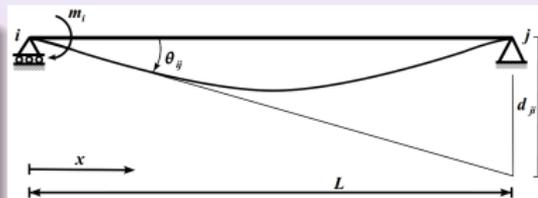
$$M(x) = \frac{m_j}{L} x$$

- Aplicando el segundo teorema de Mohr, se tiene:

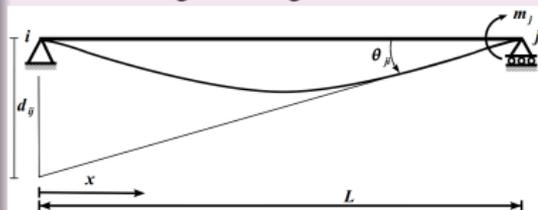
$$\theta_{ji} = \frac{d_{ij}}{L} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M(x)x}{EI(x)} dx = m_j \frac{\int_0^L x^2 \tau(x) dx}{EI_0 L^2}$$

- Aplicando la definición de rigidez, se tiene:

$$k'_{ji} = \frac{m_j}{\theta_{ji}} = \frac{EI_0 L^2}{\int_0^L x^2 \tau(x) dx}$$



*Pieza articulada-articulada.
 Rigidez al giro en i.*



*Pieza articulada-articulada.
 Rigidez al giro en j.*

Rigideces al giro

Rigideces al giro con inercia constante

- Para piezas con inercia constante, $\tau(x) = 1$, se tiene:

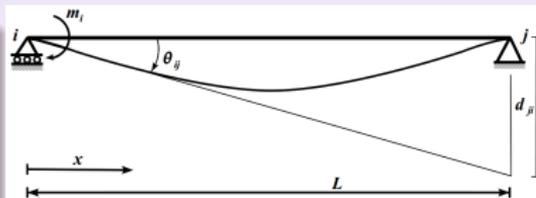
$$k'_{ij} = \frac{E I_0 L^2}{\int_0^L (L-x)^2 dx} = \frac{3 E I_0}{L}$$

$$\frac{[L^2 x]_0^L + [\frac{x^3}{3}]_0^L - [2L \frac{x^2}{2}]_0^L}{L} = \frac{3 E I_0}{L}$$

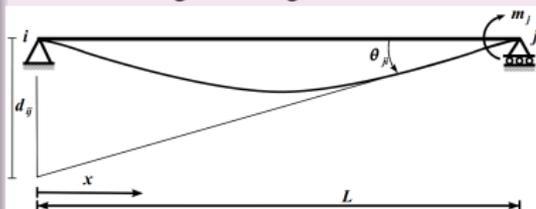
- De la misma forma:

$$k'_{ji} = \frac{E I_0 L^2}{\int_0^L x^2 dx} = \frac{E I_0 L^2}{[\frac{x^3}{3}]_0^L} = \frac{3 E I_0}{L}$$

- Por lo que se cumple que: $k'_{ij} = k'_{ji}$



*Pieza articulada-articulada.
 Rigidez al giro en i.*



*Pieza articulada-articulada.
 Rigidez al giro en j.*

Referencias



P. Martí Montrull.

Análisis de Estructuras. Métodos Clásicos y Matriciales.
Cartagena, Horacio Escarabajal, 2007.



H.H. West.

Análisis de Estructuras. Una Integración de los Métodos
Clásicos y Modernos.
México, CECSA, 1984.



Ch. H. Norris, J.B. Wilbur, S. Utku.

Análisis Elemental de Estructuras.
Bogotá, McGraw-Hill, 1982.