



Estructuras de Edificación: Tema 19 - Estructuras articuladas hiperestáticas.

David Herrero Pérez

Departamento de Estructuras y Construcción
Universidad Politécnica de Cartagena

Grado en Ingeniería de Edificación
Segundo curso
2011/2012

Tema 19: Estructuras articuladas hiperestáticas.

- 1 Introducción
- 2 Métodos de análisis
- 3 Aplicación del TFV en el método de compatibilidad



Introducción

Relaciones fundamentales

Las relaciones fundamentales para el análisis de estructuras son:

- Equilibrio.
- Compatibilidad.
- Ley de comportamiento del material.

Estructuras isostáticas

- El valor de los esfuerzos en estas estructuras es independiente de las propiedades elásticas de los elementos que la forman.
- Se obtienen esfuerzos, deformaciones y desplazamientos aplicando sucesivamente las tres relaciones fundamentales.

Estructuras hiperestáticas

En este tipo de estructuras, los valores de los esfuerzos y las reacciones dependen de las propiedades elásticas del material. Debido a esto, se deben considerar las tres relaciones fundamentales para abordar el problema.

Tema 19: Estructuras articuladas hiperestáticas.

- 1 Introducción
- 2 Métodos de análisis**
- 3 Aplicación del TFV en el método de compatibilidad



Métodos de análisis

Métodos de análisis

Básicamente, existen dos métodos para analizar las estructuras hiperestáticas:

- El **método de la compatibilidad** (también denominado **método de las fuerzas** o **método de las flexibilidades**).
- El **método del equilibrio** (también denominado **método de los desplazamientos** o **método de las rigideces**).

Método de la compatibilidad (o de las fuerzas o de las flexibilidades) - incógnitas

Se caracteriza por adoptar como incógnitas un número de fuerzas desconocidas igual al número de incógnitas hiperestáticas.

Método del equilibrio (o de los desplazamientos o de las rigideces) - incógnitas

Se caracteriza por adoptar como incógnitas los desplazamientos desconocidos de los nudos de la estructura.

Métodos de análisis

Método de la compatibilidad - Aplicación de las relaciones fundamentales

- 1 Ecuaciones de **equilibrio**.
- 2 **Ley de comportamiento**.
- 3 Ecuaciones de **compatibilidad**.

Se llega a un sistema de h ecuaciones de compatibilidad, siendo h el número de incógnitas hiperestáticas.

Método del equilibrio - Aplicación de las relaciones fundamentales

- 1 Ecuaciones de **compatibilidad**.
- 2 **Ley de comportamiento**.
- 3 Ecuaciones de **equilibrio**.

Se llega a un sistema de n ecuaciones de equilibrio, siendo n el número de grados de libertad de la estructura.

Tema 19: Estructuras articuladas hiperestáticas.

- 1 Introducción
- 2 Métodos de análisis
- 3 Aplicación del TFV en el método de compatibilidad



Introducción

Casos de hiperestaticidad

Los posibles casos de hiperestaticidad que se pueden plantear se deben a:

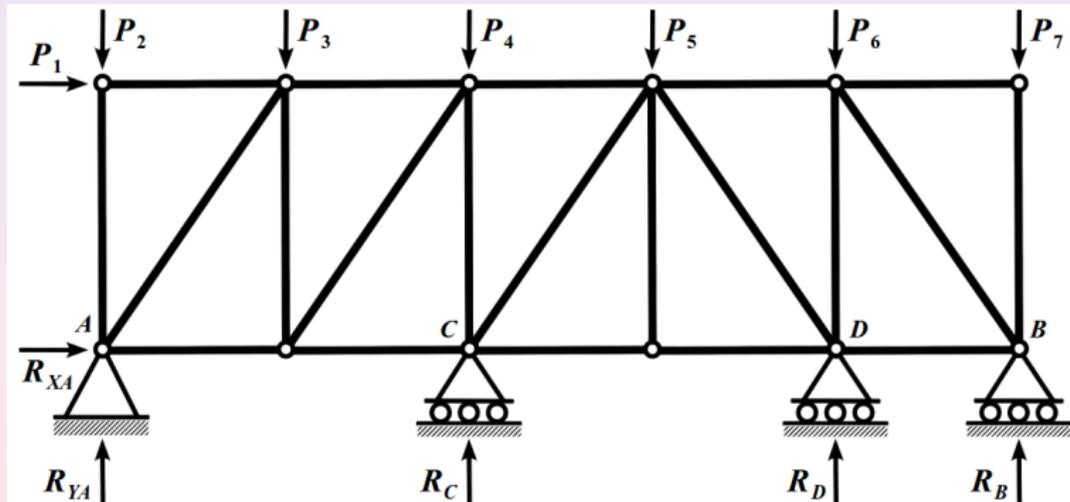
- 1 **Hiperestaticidad externa:** Cuando hay un número excesivo de condiciones de apoyo y la estructura es interiormente isostática.
- 2 **Hiperestaticidad interna:** Cuando hay un número excesivo de barras y la estructura es exteriormente isostática.
- 3 **Hiperestaticidad externa e interna:** Cuando hay un número excesivo de condiciones de apoyo y barras.

El tercer caso se puede resolver mediante la aplicación conjunta de los métodos utilizados en los dos primeros casos.

Hiperestaticidad externa con isostaticidad interna

Caso hiperestaticidad externa con isostaticidad interna

La siguiente estructura es hiperestática por exceso de reacciones.



Estructura exteriormente hiperestática



Hiperestaticidad externa con isostaticidad interna

Incógnitas

- 5 incógnitas: R_{YA} , R_{XA} , R_C , R_D , R_B .
- Tres ecuaciones de equilibrio: $\sum F_X = 0$, $\sum F_Y = 0$ y $\sum M_Z = 0$.

Grado de hiperestaticidad: **2**.

Método de compatibilidad

- 1 **Elección de las incógnitas hiperestáticas:** R' (R_C) y R'' (R_D).



Hiperestaticidad externa con isostaticidad interna

Método de compatibilidad

2 **Ecuaciones de equilibrio:** Con la sustitución de las incógnitas hiperestáticas se obtiene una estructura isostática (*estructura isostática fundamental*) que:

- Puede resolverse por alguno de los métodos conocidos en función de las cargas exteriores y de los valores incógnitas, cumpliéndose las condiciones de equilibrio.
- Sin embargo, en lugar de resolver la *estructura isostática fundamental* con todas las cargas exteriores, se puede descomponer en un estado 0, al que se aplican solo las cargas exteriores, y un estado I y II, al que se aplican las reacciones incógnitas.
- Para resolver los estados I y II se aplican cargas unitarias en los nudos en los que están R^I y R^{II} .
- Si N_j^I son los esfuerzos en la barra j al aplicar una fuerza unitaria en la posición de R^I , el esfuerzo en la barra en el caso en que se aplicara R^I sería $R^I N_j^I$. Haciendo lo mismo con R^{II} ($R^{II} N_j^{II}$) y el estado 0 (N_j^0), se tiene que aplicando el *Principio de Superposición*, el esfuerzo total en la barra j es:

$$N_j = N_j^0 + R^I N_j^I + R^{II} N_j^{II}$$

- Las reacciones son:

$$\begin{cases} R_{YA} & = & R_{YA}^0 + R^I R_{YA}^I + R^{II} R_{YA}^{II} \\ R_C & = & R^I \\ R_D & = & R^{II} \end{cases}$$

Hiperestaticidad externa con isostaticidad interna

Estado total

Esfuerzos: N_j Reacciones: R_{XA} , R_{YA} , R_B

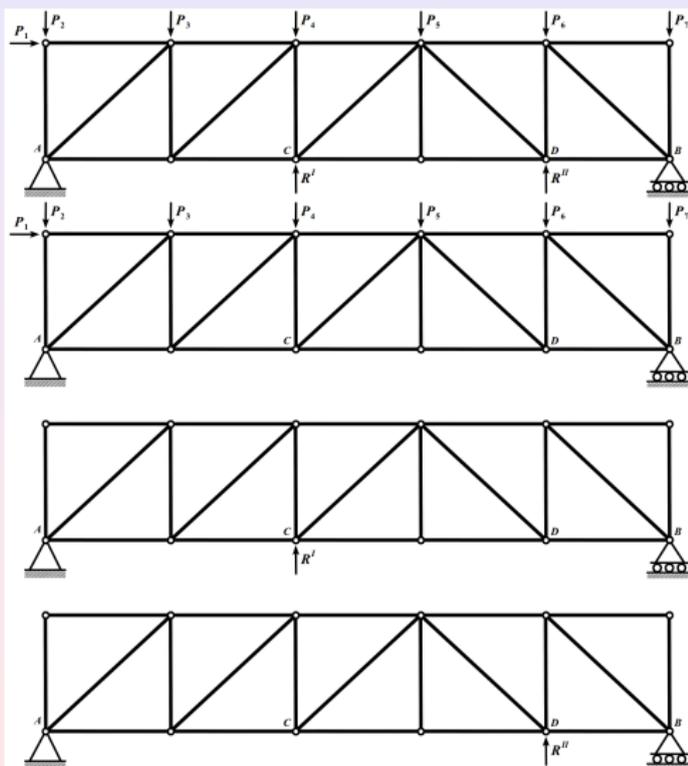
Estado 0

Esfuerzos: N_j^0 Reacciones: R_{XA}^0 , R_{YA}^0 , R_B^0

Estado I

Esfuerzos: $R^I N_j^I$ Reacciones: $R^I R_{XA}$, $R^I R_{YA}$, $R^I R_B$

Estado II

Esfuerzos: $R^{II} N_j^{II}$ Reacciones: $R^{II} R_{XA}^{II}$, $R^{II} R_{YA}^{II}$, $R^{II} R_B^{II}$ 

Hiperestaticidad externa con isostaticidad interna

Método de compatibilidad

- 3 **Ley de comportamiento:** Teniendo los esfuerzos en todas las barras en función de las incógnitas, se puede obtener el valor de la deformación total experimentada por cada barra:

$$e_j = e_j^0 + \frac{N_j L_j}{E_j A_j} = e_j^0 + \frac{(N_j^0 + R^I N_j^I + R^{II} N_j^{II}) L_j}{E_j A_j}$$

siendo e_j^0 las deformaciones producidas por un efecto distinto al de las fuerzas exteriores aplicadas (falta de ajuste, variaciones de temperatura, etc.).



Hiperestaticidad externa con isostaticidad interna

Método de compatibilidad

- 4 **Compatibilidad:** Estas condiciones exigen que se cumpla la igualdad de los desplazamientos en los extremos correspondientes de las barras que concurren en un mismo punto, y que se impongan los valores reales de los desplazamientos en los apoyos sustituidos:

- Se plantea un problema geométrico para hacer compatibles las deformaciones calculadas con los desplazamientos impuestos.
- Se puede utilizar, para cada apoyo sustituido, el TFV que permita plantear un número de ecuaciones igual al de incógnitas del problema.
- Para el estado I, el sistema real de deformaciones y desplazamientos se producirá por todas las fuerzas reales, y el sistema virtual de fuerzas que cumple la condición de equilibrio consistirá en la carga virtual unitaria aplicada en el nudo C , para la cual ya se conocen los valores de los esfuerzos. Aplicando el TFV se tiene:

$$1 \cdot u_C = \sum_{j=1}^b N_j^I e_j = \sum_{j=1}^b N_j^I (e_j^0 + \frac{(N_j^0 + R^I N_j^I + R^{II} N_j^{II}) L_j}{E_j A_j})$$

donde u_C es en general 0, aunque se puede considerar el caso de un movimiento en el apoyo al ser u_C conocido.

- Para el apoyo D se tiene:

$$1 \cdot u_D = \sum_{j=1}^b N_j^{II} e_j = \sum_{j=1}^b N_j^{II} (e_j^0 + \frac{(N_j^0 + R^I N_j^I + R^{II} N_j^{II}) L_j}{E_j A_j})$$

Hiperestaticidad externa con isostaticidad interna

Método de compatibilidad

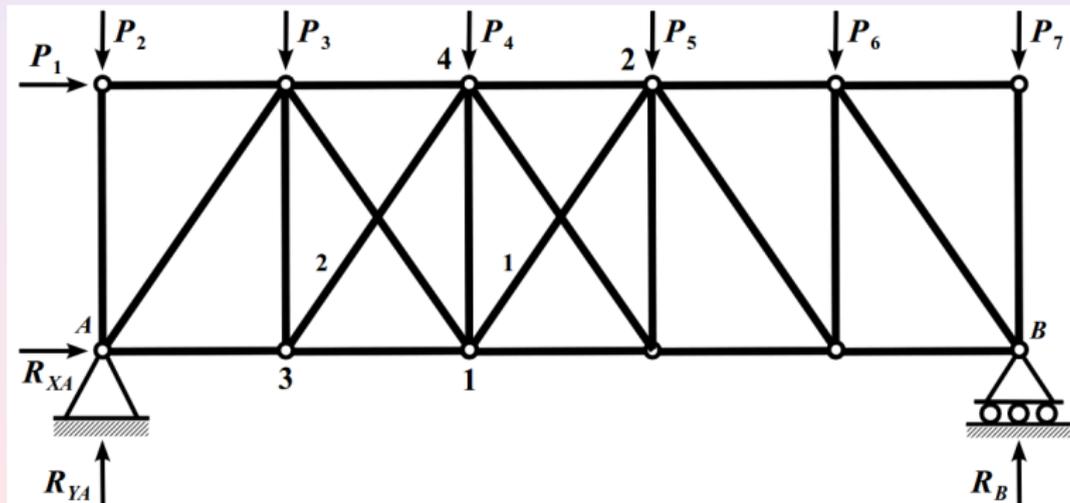
- 5 Resolución del sistema de ecuaciones:** Se llega a un sistema de dos ecuaciones de compatibilidad con dos incógnitas, que permite calcular las incógnitas hiperestáticas (R' y R'') a partir de las cuales se pueden obtener los valores de las reacciones en A y B , y los esfuerzos en las barras.
- 6 Cálculo de los desplazamientos:** Una vez conocidos los esfuerzos en todas las barras, el cálculo de los desplazamientos se reduce a un problema geométrico similar al de las estructuras isostáticas.



Hiperestaticidad interna con isostaticidad externa

Caso hiperestaticidad interna con isostaticidad externa

La siguiente estructura es hiperestática por exceso de barras.



Estructura interiormente hiperestática



Hiperestaticidad interna con isostaticidad externa

Incógnitas

- 23 incógnitas: 23 esfuerzos en las barras.
- 21 ecuaciones: $2n - 3 = 2 \cdot 12 - 3 = 21$.

Grado de hiperestaticidad: **2**.

Método de compatibilidad

- 1 Se sustituyen un número de barras, igual al grado de hiperestática, por los valores de las acciones que estas barras ejercen sobre los nudos de la estructura.



Hiperestaticidad interna con isostaticidad externa

Método de compatibilidad

2 **Ecuaciones de equilibrio:** Con la sustitución de las incógnitas hiperestáticas se obtiene una estructura isostática (*estructura isostática fundamental*) que:

- Puede resolverse por alguno de los métodos conocidos en función de las cargas exteriores y de los valores incógnitas, cumpliéndose las condiciones de equilibrio.
- Sin embargo, en lugar de resolver la *estructura isostática fundamental* con todas las cargas exteriores, se puede descomponer en un estado 0, al que se aplican solo las cargas exteriores, y un estado I y II, a los que se les aplican las fuerzas que sustituyen a las barras.
- Para resolver los estados I y II se aplican cargas unitarias, en las direcciones de las barras, en los nudos a los que estaban conectadas las barras sustituidas.
- Si N_j^I son los esfuerzos en la barra j al aplicar unas fuerzas unitarias en los nudos a los que estaba conectada la barra 1, el esfuerzo en la barra en el caso de que se hubiera aplicado X^I sería $X^I N_j^I$. Haciendo lo mismo con X^{II} se tendría $X^{II} N_j^{II}$, y si se denomina N_j^0 al esfuerzo en la barra j , debido al esfuerzo en el estado 0, se tiene, aplicando el *Principio de Superposición*, que el esfuerzo total en la barra j será:

$$N_j = N_j^0 + X^I N_j^I + X^{II} N_j^{II}$$

- En el caso particular que se presenta las reacciones son las correspondientes al estado 0. Esto se debe a que las reacciones solo dependen de las cargas exteriores, no de las características internas de la estructura.



Hiperestaticidad interna con isostaticidad externa

Estado total

Esfuerzos: N_j Reacciones: R_{XA}, R_{YA}, R_B

Estado 0

Esfuerzos: N_j^0 Reacciones: $R_{XA}^0, R_{YA}^0, R_B^0$

Estado I

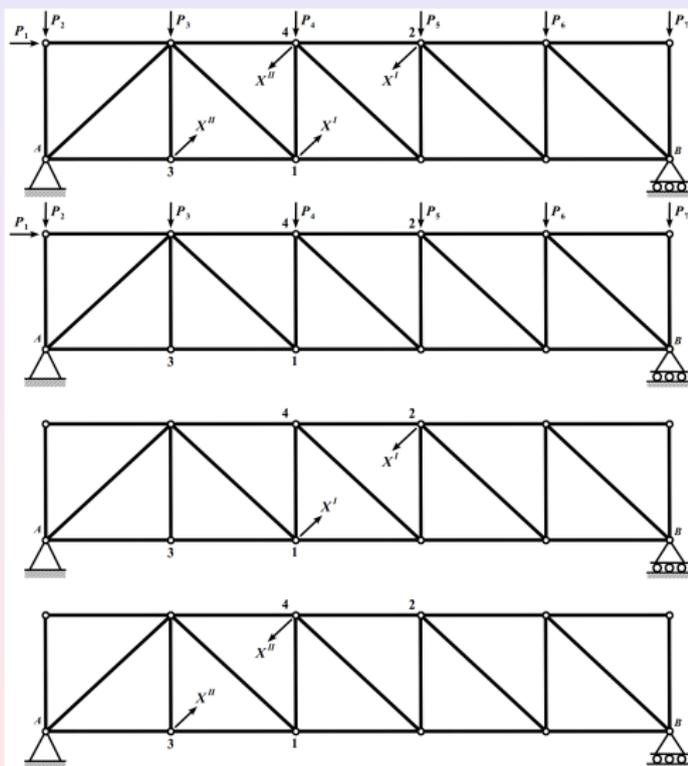
Esfuerzos: $X^I N_j^I$

Reacciones: Nulas

Estado II

Esfuerzos: $X^{II} N_j^{II}$

Reacciones: Nulas



Hiperestaticidad interna con isostaticidad externa

Método de compatibilidad

- 3 **Ley de comportamiento:** Teniendo los esfuerzos en todas las barras en función de las incógnitas, se puede obtener el valor de la deformación total experimentada por cada barra:

$$e_j = e_j^0 + \frac{N_j L_j}{E_j A_j} = e_j^0 + \frac{(N_j^0 + X^I N_j^I + X^{II} N_j^{II}) L_j}{E_j A_j}$$

siendo e_j^0 las deformaciones producidas por un efecto distinto al de las fuerzas exteriores aplicadas (falta de ajuste, variaciones de temperatura, etc.).



Hiperestaticidad interna con isostaticidad externa

Método de compatibilidad

- 4 **Compatibilidad:** Se vuelve a plantear un problema geométrico, en el que dadas unas deformaciones, en función de unas incógnitas, hay que hacerlas compatibles con la geometría de la estructura y los desplazamientos de los nudos:

- En este caso hay que hacer compatibles los desplazamientos de los nudos 1 y 2 con la deformación de la barra 1, y los desplazamientos de los nudos 3 y 4 con la deformación de la barra 2.
- Como sistema real de deformaciones y desplazamientos se emplea el debido a las fuerzas reales, y como sistemas virtuales de fuerzas las fuerzas unitarias aplicadas en los nudos 1 y 2, y 3 y 4, para los cuales ya se conocen los valores de los esfuerzos que cumplen las condiciones de equilibrio.
- Aplicando el TFV se tiene:

$$1 \cdot \vec{u}_1 + 1 \cdot \overleftarrow{u}_2 = \sum_{j=1}^{b-1,2} N_j^I e_j = \sum_{j=1}^{b-1,2} \frac{N_j L_j}{E_j A_j} = \sum_{j=1}^{b-1,2} N_j^I (e_j^0 + \frac{(N_j^0 + X^I N_j^I + X^{II} N_j^{II}) L_j}{E_j A_j})$$

siendo \vec{u}_1 y \overleftarrow{u}_2 los desplazamientos de los nudos 1 y 2 en la dirección de la barra 1 y en el sentido de las fuerzas unitarias aplicadas.



Hiperestaticidad interna con isostaticidad externa

Método de compatibilidad

4 Compatibilidad:

- Teniendo en cuenta que $\vec{u}_1 + \overleftarrow{u}_2$ es lo mismo que el acortamiento que experimenta la barra 1 debido a las fuerzas aplicadas y a otros efectos (variaciones de temperatura, faltas de ajuste, etc.), se tiene:

$$\vec{u}_1 + \overleftarrow{u}_2 = e_1 = -\left[e_1^0 + \frac{(N_1^0 + X^I N_1^I + X^{II} N_1^{II})L_1}{E_1 A_1}\right]$$

El signo negativo en la deformación es debido a que las fuerzas aplicadas (X^I) suponen que la barra esta traccionada, debido a lo cual un acortamiento de la misma debe llevar signo negativo.

- Teniendo en cuenta que la fuerza virtual en la barra 1 es unitaria, y que en el estado I el esfuerzo en la barra 2 (N_2^I) vale 0, se puede pasar la deformación de la barra 1 al segundo miembro, con lo que:

$$0 = \sum_{j=1}^b N_j^I \left[e_j^0 + \frac{(N_j^0 + X^I N_j^I + X^{II} N_j^{II})L_j}{E_j A_j} \right]$$

de la misma forma se tiene para la barra 2:

$$0 = \sum_{j=1}^b N_j^{II} \left[e_j^0 + \frac{(N_j^0 + X^I N_j^I + X^{II} N_j^{II})L_j}{E_j A_j} \right]$$



Hiperestaticidad interna con isostaticidad externa

Método de compatibilidad

- 5 Resolución del sistema de ecuaciones:** Se llega a un sistema de dos ecuaciones de compatibilidad con dos incógnitas, que permite calcular las incógnitas hiperestáticas. A partir de estos valores se obtienen los valores de los esfuerzos en las barras.
- 6 Cálculo de los desplazamientos:** Una vez conocidos los esfuerzos en todas las barras, el cálculo de los desplazamientos se reduce a un problema geométrico similar al de las estructuras isostáticas.



Referencias

-  P. Martí Montrull.
Análisis de Estructuras. Métodos Clásicos y Matriciales.
Cartagena, Horacio Escarabajal, 2007.
-  H.H. West.
Análisis de Estructuras. Una Integración de los Métodos
Clásicos y Modernos.
México, CECSA, 1984.
-  Ch. H. Norris, J.B. Wilbur, S. Utku.
Análisis Elemental de Estructuras.
Bogotá, McGraw-Hill, 1982.

