



Estructuras de Edificación: Tema 18 - Estructuras articuladas. Cálculo de desplazamientos.

David Herrero Pérez

Departamento de Estructuras y Construcción
Universidad Politécnica de Cartagena

Grado en Ingeniería de Edificación
Segundo curso
2011/2012



Tema 18: Estructuras articuladas. Cálculo de desplazamientos.

- 1 Introducción
- 2 El Método de Williot
- 3 Aplicación del Teorema de las Fuerzas Virtuales



Introducción

Resistencia de una estructura

- Para que una estructura sea capaz de resistir unas acciones exteriores, es necesario que en su interior se produzcan unas *tensiones* que equilibren a estas acciones exteriores.
- Como consecuencia de las tensiones en los elementos que forman la estructura aparecen *deformaciones*.
- Como consecuencia de las deformaciones se producen *movimientos* en los elementos de la estructura sometidos a tensiones.

Deformaciones admisibles

- Las deformaciones en una estructura deben ser suficientemente pequeñas para que la estructura realice correctamente la función para la que esta diseñada.
- Suele ser necesario calcular movimientos (desplazamientos y giros) en diversos puntos de una estructura para comprobar si son admisibles.

Métodos para calcular desplazamientos

Clasificación

Existen diversos métodos para calcular las deformaciones de estructuras. Una posible clasificación de estos es:

- 1 Métodos que permiten calcular un giro o desplazamiento cada vez:
 - Aplicación del Teorema de las Fuerzas Virtuales.
 - Segundo Teorema de Castigliano.
- 2 Métodos que proporcionan los movimientos de toda la estructura simultáneamente:
 - Método de Williot.
 - Método de la cadena de barras.



Tema 18: Estructuras articuladas. Cálculo de desplazamientos.

- 1 Introducción
- 2 El Método de Williot**
- 3 Aplicación del Teorema de las Fuerzas Virtuales



El Método de Williot

Cálculo de deformaciones

El cálculo de la deformación de cada elemento de una estructura se puede realizar mediante:

- La relación tensión-deformación del material.
- La relación fuerza-desplazamiento generalizada.

Relación fuerza-desplazamiento generalizada en barras articuladas

En el caso de estructuras de nudos articulados, esta relación es **fuerza axial - deformación** de las barras de la estructura.

Cálculo de la estructura deformada

Una vez conocidas las deformaciones locales de cada elemento de la estructura, el cálculo de la deformada de la estructura completa se reduce a un problema geométrico.

El Método de Williot

Método de Williot

- En una estructura articulada simple es posible determinar la configuración de la deformada si se conocen las longitudes iniciales de las barras y los esfuerzos que se aplican a cada una de ellas.
- El método calcula por trigonometría las longitudes de las barras antes y después de las deformaciones, y la posición de los nudos antes y después de estas deformaciones.
- La resolución se puede llevar a cabo de forma numérica y gráfica.

Limitación del Método de Williot

Este método se puede utilizar para la obtención de los desplazamientos en estructuras articuladas simples. En el caso de estructuras compuestas o complejas no es posible obtener los desplazamientos de la estructura aplicando exclusivamente este desplazamiento.



El Método de Williot

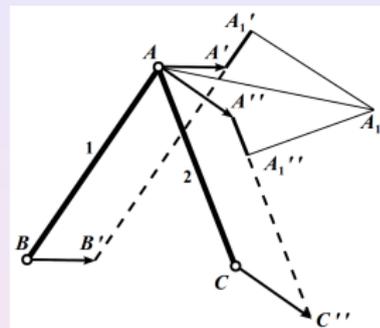
Método de Williot

Se considera un caso sencillo consistente en dos barras (1 y 2) unidas en un nudo A como se muestra en la figura.

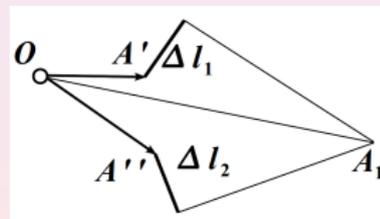
Se suponen conocidos:

- Los desplazamientos en los nudos B (BB') y C (CC'').
- Los esfuerzos a los que están sometidas las barras (N_1 y N_2).

Con esta información se desea conocer el desplazamiento en el nudo A .



Determinación gráfica del desplazamiento de un nudo.



Desplazamiento en un nudo respecto al polo

El Método de Williot

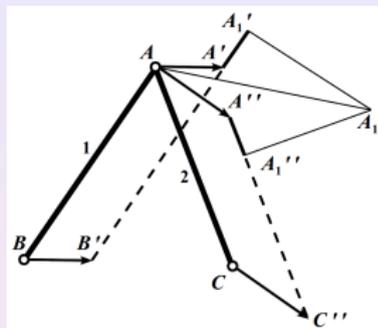
Deformación axial en las barras

La deformación axial de una barra j viene dada por:

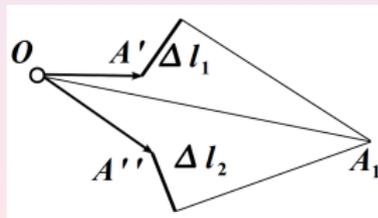
$$\Delta l_j = \frac{N_j l_j}{E_j A_j}$$

siendo:

- Δl_j : La deformación axial.
- N_j : El esfuerzo axial.
- l_j : La longitud de la barra.
- E_j : El módulo de elasticidad longitudinal.
- A_j : El área de la sección transversal.



Determinación gráfica del desplazamiento de un nudo.



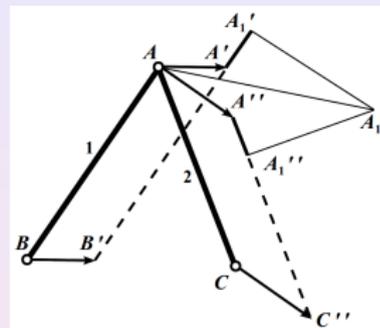
Desplazamiento en un nudo respecto al polo

El Método de Williot

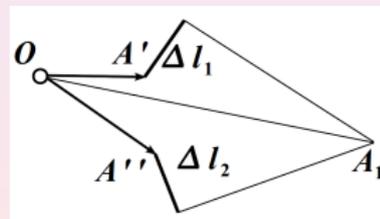
Método de Williot

- Se supone que las barras no están conectadas en el nudo A y se aplican los movimientos conocidos (suma del movimiento como sólido rígido – translación + rotación – y del movimiento debido a la deformación axial – alargamiento o acortamiento) a ambas barras.

- La translación de la barra 1 se debe al movimiento del punto $B \rightarrow$ la barra pasa a la posición $B' A'$.
- La translación de la barra 2 se debe al movimiento del punto $C \rightarrow$ la barra pasa a la posición $C'' A''$.



Determinación gráfica del desplazamiento de un nudo.

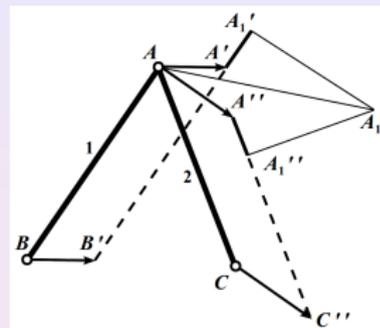


Desplazamiento en un nudo respecto al polo O .

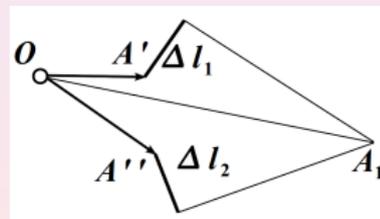
El Método de Williot

Método de Williot

- 2 Se calcula la deformación de las barras.
 - La barra 1 se somete a un esfuerzo de tracción \rightarrow se produce un alargamiento desde A' hasta A'_1 .
 - La barra 2 se somete a un esfuerzo de compresión \rightarrow se produce un acortamiento desde A'' hasta A''_1 .



Determinación gráfica del desplazamiento de un nudo.



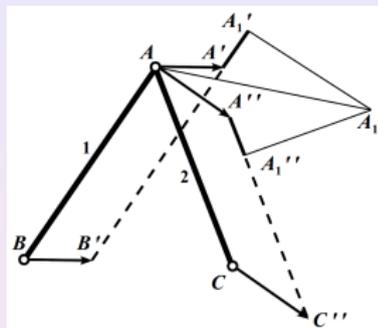
Desplazamiento en un nudo respecto al polo.

El Método de Williot

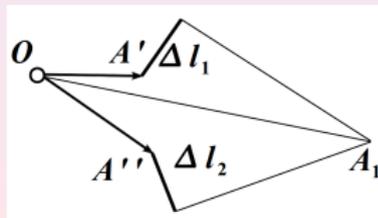
Método de Williot

- 3 Puesto que las barras deben permanecer unidas, la posición final del punto A será el punto de intersección de las trayectorias de los extremos de las barras 1 y 2 al girar, respectivamente, alrededor de los puntos B' y C'' como sigue:

- Asumimos pequeños desplazamientos \rightarrow sustituimos los arcos de circunferencia por perpendiculares a las barras 1 y 2 en los puntos A'_1 y A''_1 .
- La posición final del nudo A es A_1 .
- El desplazamiento absoluto del punto A viene dado por el vector AA_1 .



Determinación gráfica del desplazamiento de un nudo.

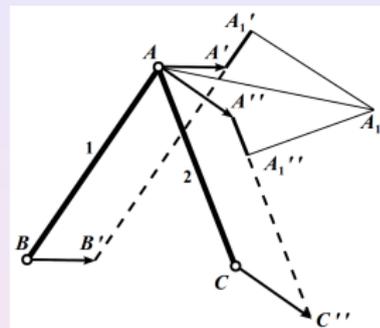


Desplazamiento en un nudo respecto al polo

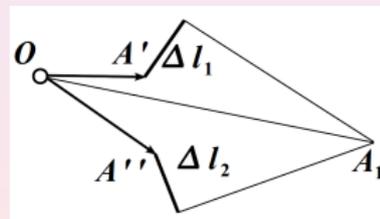
El Método de Williot

Método de Williot a escala

- Dado que las deformaciones de las barras son mucho menores que las longitudes de las mismas se suele aplicar una escala muy grande para poder aplicar el método.
- Esto se lleva a cabo representando los desplazamientos y deformaciones por separado, como se muestra en la figura a partir de un polo O , que es el origen de los desplazamientos.



Determinación gráfica del desplazamiento de un nudo.



Desplazamiento en un nudo respecto al polo O .

Tema 18: Estructuras articuladas. Cálculo de desplazamientos.

- 1 Introducción
- 2 El Método de Williot
- 3 Aplicación del Teorema de las Fuerzas Virtuales



Aplicación del Teorema de las Fuerzas Virtuales

Teorema de las Fuerzas Virtuales (TFV) para un sistema elástico

Las deformaciones y desplazamientos en un sistema elástico son compatibles y consistentes con las restricciones sí y solo sí el trabajo virtual externo complementario es igual al trabajo virtual interno complementario, para todo sistema de fuerzas y tensiones virtuales que satisfacen las ecuaciones de equilibrio.

TFV para una estructura de nudos articulados

El TFV viene dado por:

$$\sum_{i=1}^n (F_{iX}^* u_{iX} + F_{iY}^* u_{iY} + F_{iZ}^* u_{iZ}) = \sum_{j=1}^b N_j^* e_j$$

siendo:

- F_{iX}^* , F_{iY}^* y F_{iZ}^* las fuerzas exteriores (incluyendo reacciones) virtuales en las direcciones X , Y y Z aplicadas en el nudo i .
- N_j^* el esfuerzo axial virtual en la barra j .
- u_{iX} , u_{iY} y u_{iZ} los desplazamientos reales del nudo i en las direcciones X , Y y Z .
- e_j la deformación axial real de la barra j .

Aplicación del Teorema de las Fuerzas Virtuales

TFV para una estructura de nudos articulados

La expresión del TFV relaciona un sistema de fuerzas y esfuerzos **virtuales** (F^* , N^*) y un sistema de desplazamientos y deformaciones **reales** (u , e) de la estructura, para lo que se debe puntualizar:

- El sistema de fuerzas debe ser un *sistema en equilibrio*, pero no tiene que ser el que realmente actúa sobre la estructura en equilibrio:
 - 1 No se ha impuesto ninguna condición sobre la *ley de comportamiento* del material, por lo que la expresión del TFV es válida para cualquier ley de comportamiento.
 - 2 La ecuación del TFV para estructuras de nudos articulados es una *ecuación de compatibilidad entre movimientos y deformaciones reales* en la estructura. No se hace ninguna hipótesis sobre la naturaleza de las deformaciones e , por lo que estas pueden deberse a cualquier causa.



Aplicación del Teorema de las Fuerzas Virtuales

Causas de deformaciones

Las deformaciones e_j que se producen en la estructura a estudiar pueden ser:

- 1 Debidas a los esfuerzos en las barras: $e_j = \frac{N_j L_j}{E_j A_j}$.
- 2 Debidas a variaciones de temperatura: $e_j = \alpha_j L_j \Delta T_j$, siendo:
 - α_j el coeficiente de dilatación térmica.
 - ΔT_j la variación de temperatura de la barra j .

Al considerar la tracción positiva, las deformaciones de las barras serán positivas si corresponden a alargamientos.

- 3 Debidas a faltas de ajuste u otras causas: $e_j = e_j^0$, siendo:
 - e_j^0 la deformación correspondiente de la barra j .

La deformación será positiva si se supone un aumento de la longitud inicial de la barra.

Referencias



P. Martí Montrull.

Análisis de Estructuras. Métodos Clásicos y Matriciales.
Cartagena, Horacio Escarabajal, 2007.



H.H. West.

Análisis de Estructuras. Una Integración de los Métodos
Clásicos y Modernos.
México, CECSA, 1984.



Ch. H. Norris, J.B. Wilbur, S. Utku.

Análisis Elemental de Estructuras.
Bogotá, McGraw-Hill, 1982.

